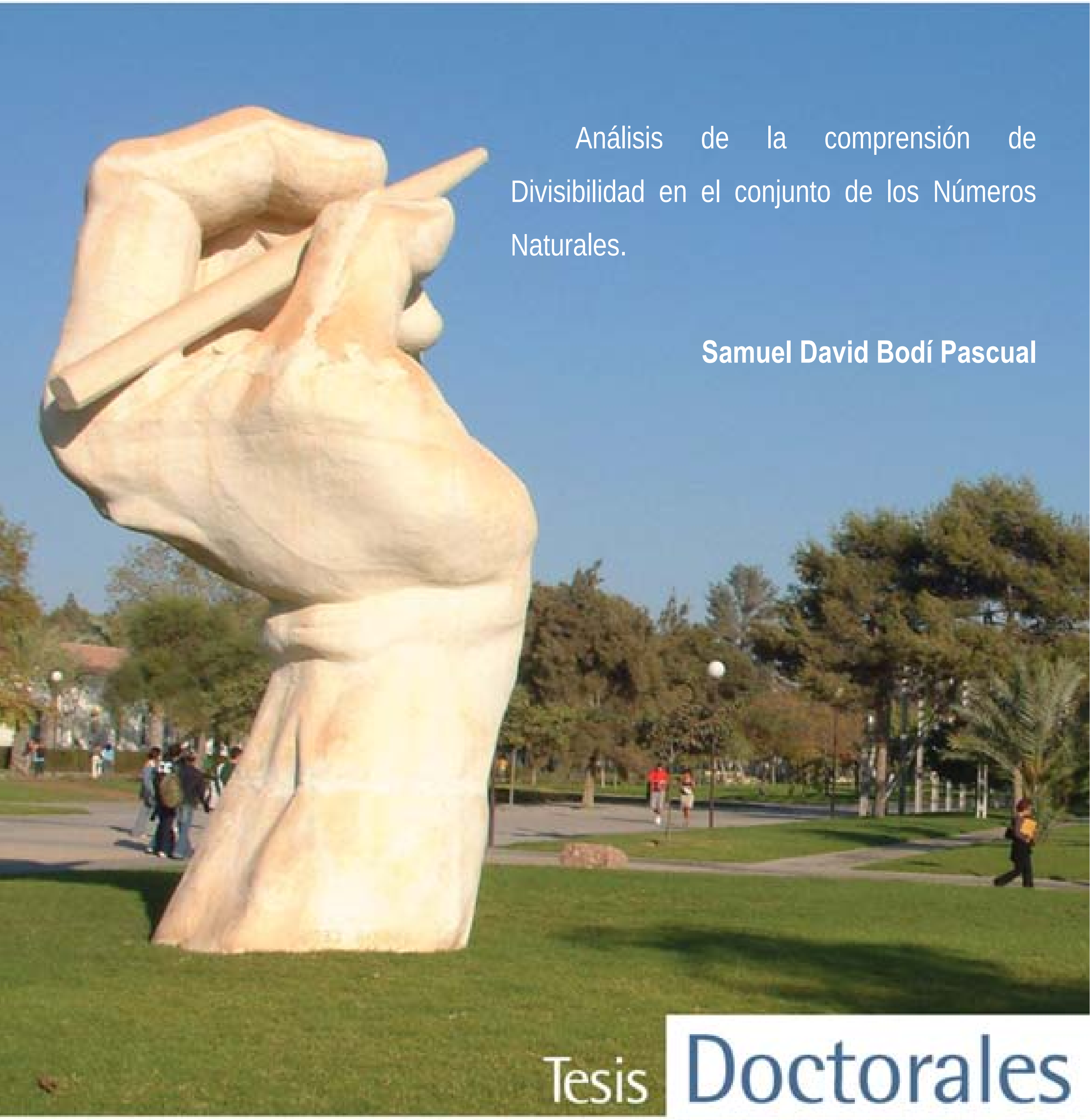
Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante



Análisis de la comprensión de Divisibilidad en el conjunto de los Números Naturales.

Samuel David Bodí Pascual

Tesis Doctorales

UNIVERSIDAD de ALICANTE

www.eltallerdigital.com

ISBN: 978-84-690-9721-2 · **Depósito Legal:** A-171-2008

UNIVERSIDAD de ALICANTE

UNIVERSIDAD DE ALICANTE

FACULTAD DE EDUCACIÓN

Departamento de Innovación y Formación Didáctica

Análisis de la comprensión de Divisibilidad en el conjunto de los Números Naturales.

ISBN: 978-84-690-9721-2 · **Depósito Legal:** A-171-2008

Samuel David Bodí Pascual

Alicante, 2006

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

2. MARCO TEÓRICO

2.1. LA CONSTRUCCIÓN DE OBJETOS MATEMÁTICOS

2.2. UNA APROXIMACIÓN PIAGETIANA DE LA CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO

2.2.1. Teoría APOS.

2.2.1.1. Las construcciones mentales.
2.2.1.2. Los mecanismos.
2.2.1.3. La descomposición genética.
2.2.1.4. Desarrollo de un esquema.

2.2.2. Potencialidad de la Teoría APOS.

2.2.3. La comprensión de la divisibilidad en N desde la Teoría APOS.

2.3. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN.

3. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

3.1. DISEÑO, APLICACIÓN Y ANÁLISIS CUANTITATIVO DEL CUESTIONARIO PILOTO

3.1.1. Sujetos.

3.1.2. Identificación de los contenidos del cuestionario piloto.

3.1.3. Elaboración del cuestionario piloto.

3.1.4. Aplicación y análisis cuantitativo del cuestionario piloto:

1. Índice de Dificultad
2. Homogeneidad.
3. Índice de Discriminación (correlación biserial puntual).
4. Índice de Fiabilidad.
5. Validez.
6. Generalizabilidad.

3.1.5. Conclusiones del análisis del cuestionario piloto.

3.2. PRUEBA DEFINITIVA

3.2.1. Sujetos.

3.2.2. Instrumentos de recogida de datos.

3.2.2.1. El Cuestionario.

- Los problemas del cuestionario.
- Elementos y representaciones de las nociones de divisibilidad.

UNIVERSIDAD de ALICANTE

UNIVERSIDAD de ALICANTE

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

AGRADECIMIENTOS

Desde estas líneas quiero mostrar mi agradecimiento a la Directora de esta Tesis, la Dra. Dª Julia Valls González, y al Director del Departamento de Innovación y Formación Didáctica de la Universidad de Alicante, Dr. D. Salvador Llinares Císcar, por su ayuda continua, por su apoyo, por su rigor y por su contribución científica, y sin los cuales esta Tesis no podría haber sido una realidad. Gracias por estar ahí y por enseñarme a aprender, a mejorar la práctica docente y a enseñar.

Al Dr. D. Leandro Navas Martínez por sus consejos, orientaciones y ayuda para realizar el análisis cuantitativo de los datos de la investigación.

A los profesores y alumnos de los diferentes Centros educativos que colaboraron en la realización de esta investigación.

Por último, quiero dar las gracias a nuestros familiares, sobre todo a los ausentes, por su estímulo y por su paciencia, dando siempre su ánimo para la realización y conclusión de esta Tesis.

(Esta Tesis Doctoral ha recibido una Ayuda a la Investigación en la convocatoria del año 2004, del Instituto Alicantino de Cultura Juan Gil-Albert de la Diputación de Alicante)

A ma mare, per tot i per tant

Car no perdura el vent de les paraules,
ans el risc de donar-se per comprendre
i el que compta és l'esforç de cada dia
compartit tenaçment amb els qui creuen
que cada gest eixampla l'esperança,
que cap dia no es perd per als qui lluiten.

Martí i Pol

¿Qué es la vida? Un frenesí.
¿Qué es la vida? Una ilusión,
una sombra, una ficción,
y el mayor bien es pequeño:
que toda la vida es sueño,
y los sueños, sueños son.

Calderón de la Barca

LISTA DE TABLAS Y ESQUEMAS


Tesis Doctorales
UNIVERSIDAD de ALICANTE

CAPÍTULO 1. IDENTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

El presente trabajo trata de la comprensión de los alumnos de Educación Secundaria sobre la divisibilidad en el conjunto de los números naturales. El estudio se centra en las formas de conocer y de construir el conocimiento de los conceptos de divisibilidad en el conjunto de los números naturales, en un rango de edad de 12 a 17 años- 1º de Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO), 4º de ESO, tanto en la modalidad de la opción A como B, y de 1º de Bachillerato, opciones Científico-Técnica y de Humanidades y Ciencias Sociales- (D.O.G.V de 8 de marzo de 2002 y D.O.G.V de 5 de abril de 2002). El campo en que se ubica el trabajo realizado es el de Pensamiento Numérico, dentro de la investigación en Didáctica de la Matemática.

En este primer capítulo realizaremos una breve reflexión sobre la divisibilidad en el conjunto de los números naturales tanto en el currículo de la educación primaria como en el de educación secundaria, y su tratamiento en los libros de texto de la educación secundaria ubicados en este momento en el primer ciclo. Finalizamos este capítulo exponiendo distintas aportaciones de diferentes investigadores sobre la comprensión de la divisibilidad en N.

La reflexión sobre la importancia del pensamiento, del razonamiento, de la resolución de problemas y de la comunicación centran los actuales esfuerzos de las matemáticas escolares (Silver et al., 1997). Señalan estos autores que no es suficiente que los alumnos conozcan los procedimientos aritméticos básicos, si no que además es necesario que sepan aplicarlos cuando corresponda y dar sentido a las situaciones que aparezcan desarrollando estrategias que les permitan formular y resolver problemas. Por ello, se espera que los alumnos sean capaces de dar una estructura a las nuevas situaciones, que generen hipótesis y analicen críticamente las estrategias más adecuadas en cada situación, de modo que estos estudiantes lleguen a ser ciudadanos más capacitados y estén preparados para afrontar los desafíos del nuevo siglo.

Los Decretos Curriculares de Educación Secundaria (Decretos 1007/1991, 831/2003, 47/1992 y 39/2002) y Bachillerato (1178/1992, 832/2003, 174/1994 y 50/2002) destacan la importancia de la aplicación de las matemáticas, más allá de la especialización científica, de su relación con las demás ciencias, y de su carácter instrumental, que ayude al alumno a comprender la realidad que le rodea. En Educación Secundaria cabe considerar la etapa obligatoria donde se han de cubrir las necesidades matemáticas básicas y proporcionar los instrumentos necesarios para posteriores estudios. Todos los alumnos deben adquirir los conocimientos necesarios para desenvolverse como ciudadanos capaces de ejercer sus derechos y sus deberes en una sociedad que incorpora cada vez más a su funcionamiento, a sus actividades y a su lenguaje ciertos aspectos matemáticos.

Para encuadrar nuestra investigación sobre la comprensión de la Divisibilidad hemos realizado un análisis histórico de contenidos de la divisibilidad a partir del desarrollo del currículo y del que realizan los proyectos editoriales. El análisis histórico y el estudio de significados institucionales (Godino, 1996) permiten concebir el funcionamiento mental y los contextos sociales y culturales como entidades que actúan conjuntamente, constituyendo aspectos de la acción humana. Además, es necesario destacar que los individuos se desarrollan en diferentes contextos culturales e institucionales, encontrándose los objetos matemáticos mediatizados por los significados institucionales.

1.1. LA DIVISIBILIDAD EN N.

En este apartado vamos a ofrecer un breve desarrollo histórico de la Divisibilidad. Presentaremos el por qué de su nacimiento y su formalización a lo largo de los siglos.

1.1.1. Desarrollo histórico de la Divisibilidad.

La organización de las relaciones existentes entre los números constituye el origen de la teoría de la divisibilidad (Sierra et al., 1989). Entre los hechos en los que intervenían los conceptos de divisibilidad en la Antigüedad se pueden situar las necesidades de la agricultura y de la ganadería, y su dependencia y relación con las estaciones climáticas y ciclos lunares que hizo que se desarrollaran distintos tipos de calendarios.

Desde la Antigüedad hasta principios del siglo XIX los objetos principales de las matemáticas estaban constituidos por los números, las magnitudes y las figuras. Existía la creencia generalizada de que los objetos matemáticos nos son dados y no se tiene el poder de asignarles propiedades arbitrarias (Bourbaki, 1972). En la matemática de la Grecia clásica destacan las obras de Euclides, Arquímedes, Apolonio, Ptolomeo y Diofanto. Éstas jugaron un papel relevante en la matemática de los siglos XVI, XVII y XVIII (Bochner, 1991; Kline 1992; Boyer, 1999). La matemática griega poseía limitaciones que impedían modelar el pensamiento científico como nosotros lo entendemos en estos momentos.

El estudio de los múltiplos, de los divisores y de la descomposición factorial de los números naturales ha constituido un capítulo fundamental de la Aritmética desde el comienzo de la Matemática. Entre los matemáticos más prominentes de la Antigüedad se encuentra Euclides de Alejandría (año 300 a.C.), cuyos "*Elementos*", conjunto de trece volúmenes, recoge de manera axiomatizada el saber matemático de su tiempo. Los libros VII, VIII y IX, en particular, reúnen los tratados de Aritmética, y ofrecen una descripción de la Teoría de Números, es decir, de las propiedades de los números enteros y de las razones entre los mismos.

Euclides en el libro VII, mediante 22 definiciones, establece los conceptos de:

- **"Número"**- "*Un número es una pluralidad compuesta de unidades*" (Definición 2) "*Una unidad es aquello en virtud de la cual cada una de las cosas que hay, se llama una*" (Definición 1). El "número" para Euclides es una magnitud.
- **"Parte"** (Divisor)- "*Un número es parte de un número, el menor del mayor, cuando mide al mayor*"- **"Partes"** (no divisor) - "*cuando no lo mide*". **"Múltiplo"**- "*Y el mayor es múltiplo del menor cuando es medido por el menor*"- (Definiciones 3, 4 y 5, respectivamente).
- Clasifica los números en pares e impares; parmente par e impar; imparmente (desde las definiciones 6 a 10). Número **"primo"**- "el medido por la sola unidad"- Números **"primos entre sí"** –"los medidos por la sola unidad como medida común" (Definición 11 y 12, respectivamente). Número **"compuesto"** –"*es el medido por algún número*"- Números **"compuestos entre sí"** –"*son los medidos por algún número como medida común*"- (Definiciones 13 y 14, respectivamente). Por último, tras establecer que "*un número multiplica a un número cuando el multiplicado se añade a sí mismo tantas veces como unidades hay en el otro y resulta un número*", completa la categorización de los números definiendo número plano, sólido, cuadrado, cubo y perfecto, y estableciendo algunas relaciones entre estos números.

Las definiciones de número, divisor, múltiplo y de las distintas clases de números fueron realizadas en términos de magnitudes. Los griegos no concibieron los números tal como hoy los concebimos. Consideraron razones (P : Q) entre magnitudes o proporciones, pero conceptualmente no pudieron formar el producto P x L entre magnitudes genéricas, noción que nunca definieron. Generalmente, entendieron el “producto” de dos longitudes como un área o un volumen, si uno de los factores era una longitud y el otro un área, si bien estos “productos” nunca constituyeron actos reflexivos y conscientes (Bochner, 1991).

El libro VII se completa con 22 proposiciones que junto con las 27 del libro VIII y las 36 del libro IX constituyeron investigaciones teóricas con, entre otros, los siguientes objetivos:

- Establecer un procedimiento, llamado “*antenaresis*” y conocido actualmente como **“Algoritmo de Euclides”**, para calcular el máximo común divisor de dos o más números desarrollado a través de las proposiciones VII-1 a VII-3:

  “*Dados dos números desiguales y restando sucesivamente el menor del mayor, si el que queda no mide nunca al anterior hasta que quede una unidad, los números iniciales serán primos entre sí*” (Proposición 1)

  “*Dados dos números no primos entre sí, hallar su medida común máxima*” (Proposición 2) Corolario: “*Si un número mide a dos números, entonces también mide a su medida común máxima*”

  “*Dados tres números no primos entre sí, hallar su medida común máxima*” (Proposición 3).
- Proponer distintas **propiedades de la divisibilidad** desde la proposición VII-4 a la proposición VII-11. Por ejemplo: “*Todo número es parte de todo número, el menor del mayor*” (Proposición 4) “*Si un número es parte de un número, y otro es la misma parte de otro, la suma será también la misma parte de la suma que el uno del otro*” (Proposición 5).
- Desarrollar la teoría de las proporciones para números mediante las proposiciones VII-12 a VII-20.
- Definir y establecer propiedades de los números primos entre sí a partir de las proposiciones VII-21 a VII-29.
- Clasificar los números en compuestos y primos (Proposición VII-31 y VII-32 respectivamente).

- Establecer un procedimiento para calcular **el mínimo común múltiplo** de dos o más números desarrollado a través de las proposiciones VII-33 a VII-39. Por ejemplo:

  "*Dados tantos números como se quiera, hallar los menores de aquellos que guardan la misma razón que ellos*" (Proposición 33).

  "*Dados dos números, hallar el menor número al que miden*" (Proposición 34).

  "*Si dos números miden a algún número, el número menor medido por ellos también medirá al mismo número*" (Proposición 35).

  "*Dados tres números, hallar el número menor al que miden*" (Proposición 36).

Por último, en el libro IX de Euclides encontramos, entre las 36 proposiciones que lo conforman, las proposiciones IX-1 a IX-11, donde se establecen propiedades de los "productos" entre números sólidos, cubos, cuadrados; a partir de las proposiciones IX-21 a IX-34, propiedades de los números pares e impares, de los parmente pares e impares y de los imparmente pares e impares. Además se incluye la proposición IX- 20- "*Hay más números primos que cualquier cantidad propuesta de números primos*"- que establece que el conjunto de números primos es infinito, junto con proposiciones próximas al Teorema Fundamental de la Aritmética.

Las proposiciones IX-12, 13 y 14 - "*Si tantos números como se quiera a partir de una unidad son continuamente proporcionales, por cuantos números primos sea medido el último, por los mismos será medido también el siguiente a la unidad*" (Proposición 12); "*Si tantos números como se quiera a partir de una unidad son continuamente proporcionales y el siguiente a la unidad es un número primo, el mayor no será medido por ningún otro fuera de los que se encuentran entre los números proporcionales*" (Proposición 13) y "*Si un número es el menor medido por números primos, no será medido por ningún otro número primo fuera de los que le medían desde un principio*" (Proposición 14), constituyen teoremas silogísticamente cercanos al Teorema Fundamental de la Aritmética, pero este teorema, según Bochner (1991), no pudo ser concebido por los griegos, ya que éstos

- no llegaron a concebir el **producto** de números reales, y
- nunca llegaron a darse cuenta de que en matemáticas se puede concebir una "**existencia**" totalmente independiente de la "constructibilidad".

Estos dos aspectos son necesarios para idear el Teorema Fundamental de la Aritmética. Este teorema es un teorema de **existencia** que asegura **una representación única** de cualquier número en **producto** de factores primos para cuya **construcción no existen fórmulas específicas**.

A partir del siglo XVI, y debido a las necesidades tecnológicas, científicas y mercantiles, se mejoraron y extendieron los métodos operativos. La extensión de la teoría de la divisibilidad a otros conjuntos tiene su referente histórico en Stevin, quien en un libro publicado en 1634, extiende el algoritmo de Euclides al cálculo del máximo común divisor de dos polinomios.

En el siglo XVII Fermat consideraba la aritmética como un dominio propio y sus trabajos determinaron la dirección de la Teoría de Números hasta Gauss. Destaca en su obra sobre Teoría de Números la teoría de la divisibilidad, los números primos, el tratamiento de los números perfectos[1], números amigos[2] y cuadrados mágicos.

Euler en 1770 trató de ampliar el concepto de divisor más allá de los conjuntos de los números enteros y de los polinomios, encontrándose con el problema de que no es posible conservar todas las propiedades en esa extensión, en especial, las de la existencia del máximo común divisor y de la unicidad de la descomposición en factores primos.

Hasta el siglo XIX con Gauss, la teoría de la divisibilidad se desarrolló en el campo de los números enteros. En las obras de Gauss "*Disquisiciones arithmeticae*" se encuentra por primera vez el concepto de número congruente y se desarrollan las propiedades de la teoría de congruencias. En el trabajo de Gauss se incluía el Teorema Fundamental de la Aritmética para el dominio de integridad de los números enteros, que indica que *todo número entero puede expresarse como un producto finito de número primos, en el que algunos factores pueden repetirse, y tal que su representación es única*. Gauss también introdujo la noción de grupo abeliano y demostró que en los grupos abelianos finitos existe un elemento del grupo cuyo orden es m.c.m de los órdenes de todos los elementos.

---

[1] Un número a es perfecto cuando puede ser expresado como suma de todos sus divisores (excepto él mismo).

[2] Dos números a y b son *amigos* si la suma de todos los divisores de a, distintos de a, da como resultado b.

Uno de los corolarios al teorema de Euclides sobre la existencia de infinitos números primos, lo enunció Dirichlet en este mismo siglo. En el siglo XIX, autores como Kummer, Dedekind y Kronecker generalizan la Teoría de Números, en particular la teoría de la divisibilidad, mediante la creación de la estructura de ideal.

El álgebra conmutativa moderna empezó a formalizarse hacia 1910 y en esta década aparece la noción general de anillo debido a Fraenkel. La Teoría de Números (Rey, 1941) ocupa a partir del siglo XX una posición prominente respecto de la Aritmética, del Álgebra y de la Geometría. La Teoría Elemental de Números abarca desde este siglo un amplio espectro en el ámbito de las Matemáticas, y en ella, en particular, podemos destacar el estudio de la estructura multiplicativa y de la divisibilidad en el conjunto de los números naturales. Entre aquellos aspectos que cabe mencionar en el estudio de la divisibilidad en N, se encuentran los conceptos de múltiplo, divisor, factor, ser divisible y criterios de divisibilidad; divisores y múltiplos comunes: el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo; número primo y número compuesto, o el Teorema Fundamental de la Aritmética, tratándose de un tema de gran potencialidad.

Esta breve revisión histórica nos permite conformar la Divisibilidad en N, en particular, y la Teoría de Números, en general, en tres grandes fases:

- 1ª Fase o de conceptualización.
- 2ª Fase o de las propiedades y procedimientos.
- 3ª Fase o de generalización.

Las dos primeras debidas a Euclides y la última a matemáticos posteriores.

- **1ª Fase o de conceptualización**

La noción de número entendida como una magnitud (magnitud de un segmento) forzó a describir los conceptos de múltiplo, divisor, número primos y compuesto... en términos de “medida”, de medida de una magnitud. Esta forma de pensar estos conceptos impidió que los griegos concibieran el “producto” entre magnitudes genéricas. No llegaron a imaginar el producto de números reales.

- **2ª Fase o de las propiedades y procedimientos**

Euclides formuló propiedades y procedimientos fundamentales para la Teoría de Números. Entre las propiedades destacamos las relativas a

- ♦ "la infinitud de los números primos"
- ♦ los teoremas silogísticamente próximos al Teorema Fundamental de la Aritmética. Este teorema no pudo ser enunciado por los matemáticos griegos en los términos actuales al (a) no concebir el producto entre números reales; (b) no admitir una "existencia" independientemente de la "construcción".

En cuanto a los procedimientos, Euclides estableció las bases de los procedimientos de cálculo del mínimo común múltiplo de dos o más números y del máximo común múltiplo de dos números, el hoy conocido como "Algoritmo de Euclides".

- **3ª Fase o de generalización**

La estructura del conocimiento sobre divisibilidad en los tres últimos siglos ha permitido integrar dicho conocimiento en una configuración más amplía de estructuras algebraicas y consolidar a la Teoría de Números como un campo de investigación.

1.2. CURRÍCULO DE DIVISIBILIDAD EN EDUCACIÓN PRIMARIA Y SECUNDARIA EN EL SIGLO XX.

En los siguientes apartados realizamos un resumen de las adaptaciones curriculares de la Divisibilidad en N en la Enseñanza Primaria y Secundaria en nuestro país desde principios del siglo XX hasta la actualidad. Los manuales escolares son un instrumento transmisor de los contenidos aceptados socialmente resultando interesante su contribución en la historia de la educación matemática (Sierra et al., 1999). La descripción de las características más importantes del tratamiento de la divisibilidad, ejemplificadas a través de distintos proyectos editoriales, la hemos dividido en seis periodos marcados por las reformas educativas y acontecimientos políticos:

I. Periodo anterior a 1931

II. Periodo comprendido entre 1931 y 1936

III. Periodo comprendido entre 1939 y 1950

IV. Periodo 1950 a 1970

V. Periodo de 1970 a 1990

VI. Periodo de 1990 hasta la actualidad.

Las principales características del tratamiento curricular de la divisibilidad en estos periodos hacen referencia a (a) las acepciones léxicas- divisor, ser divisible, múltiplo, factor- con las que se inicia el estudio de la divisibilidad; (b) las operaciones a las que se asocian los conceptos de múltiplo y divisor; (c) cómo es considerada la divisibilidad: propiedad entre números y/o vinculada con la magnitud; (d) el carácter procedimental o representacional del Teorema Fundamental de la Aritmética.

I. Periodo anterior a 1931.

En el último tercio del siglo XIX se iniciaron las discusiones sobre educación, en asuntos tales como la libertad de cátedra, la libertad de creación de centros, exámenes, o titulaciones. La enseñanza primaria se convirtió en un asunto principal desde el punto de vista pedagógico aunque no político, destacando las aportaciones de la Institución Libre de Enseñanza (Prellezco, 1994). La Ley de Instrucción Pública del ministro Claudio Moyano de 1857, fue la que marcó las líneas principales de la Instrucción Pública en España hasta prácticamente la Segunda República, con pequeños retoques a lo largo de su vigencia. Esta Ley de Instrucción Pública constaba de cuatro secciones. En la Sección I se estructuraba la enseñanza en tres niveles: primera enseñanza, segunda enseñanza y superior, componiéndose la segunda enseñanza de seis años de estudios generales y estudios de aplicación a profesiones industriales.

En 1900, con García Alix, se creó el Ministerio de Instrucción Pública y Bellas Artes y la educación dejó de depender del Ministerio de Fomento. Se instituyeron diversos organismos en su estructura funcional y se tomó como punto principal de referencia la lucha contra el analfabetismo (Samaniego, 1994a). La presencia de un alto índice de analfabetismo entre la población española, del 64% a comienzos del siglo XX, refleja unas fuertes carencias de la enseñanza primaria (Del Valle, 1994).

Hasta 1931 la Enseñanza Primaria y su organización fueron reguladas por diversos decretos - 1901, 1905, 1913-. En 1901 se fijó el programa de la **enseñanza primaria**, integrado por diversas materias entre las que se encontraba la Aritmética. La metodología era decisión del maestro y el aprendizaje solía ser eminentemente memorístico.

En esta época, una concreción curricular de los contenidos de divisibilidad en educación primaria y profesional la podemos obtener en el libro del profesor Dalmáu (1899) "*Soluciones analíticas de los ejercicios y problemas de aritmética*", que presentaba como "*un conjunto, ordenado, metódico, gradual y completo de problemas y ejercicios prácticos*" y que se enmarcaba en un movimiento de renovación pedagógica del momento. Para el tema de divisibilidad plantea ejercicios sobre (a) la obtención de números divisibles por otro dado, (b) formación de múltiplos de un número natural expresándolos como la multiplicación del número por otros números naturales, (c) obtención de todos los divisores de un número a través de la representación factorial y (d) obtención del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo por dos métodos.

Estos ejercicios se plantean desde una perspectiva eminentemente procedimental. Este hecho puede observarse en la manera en que Dalmáu (1899) usa, por ejemplo, el Teorema Fundamental de la Aritmética en el cálculo del mínimo común múltiplo y en la obtención de los divisores de un número. El problema 22 presenta dos procedimientos de obtención del mínimo común múltiplo de dos números, diferenciándolos explícitamente como el "*del método ordinario y el de los factores primos*". Por el método ordinario entiende utilizar el "algoritmo de Euclides" y por el de factores primos el "Teorema Fundamental de la Aritmética".