Interpretación de significados de la función cuadrática en un ambiente computacional, desarrollada por estudiantes de II de Bachillerato de la Escuela Normal Mixta "Pedro Nufio"

Universidad Pedagógica Nacional "Francisco Morazán"

Vice Rectoría de Investigación y Postgrado

Dirección de Postgrado

Interpretación de significados de la función cuadrática en un ambiente computacional, desarrollada por estudiantes de II de Bachillerato de la Escuela Normal Mixta "Pedro Nufio"

Tesis

Para obtener el título de:

Máster en Matemática Educativa

Presentada por:

José Enrique Rivera Pavón

Asesor de Tesis

M.Sc. María Magdalena Alvarado Soriano

TEGUCIGALPA, M. D. C. Mayo 2009.

Rectora

M.Sc. Lea Azucena Cruz Cruz

Vice Rector Académico

M.Sc. David Orlando Marín López

Vice Rector de Investigación y Postgrado

Dr. Truman Bitelio Membreño

Vice Rector de Educación a Distancia

M.Sc. Gustavo Adolfo Cerrato

Vice Rector Administrativo

M.Sc. Hermes Alduvín Díaz Luna

Secretaria General

M.Sc. Iris Milagro Erazo Tábora

Directora de Postgrado

Dra. Jenny Margoth Zelaya Matamoros

Agradecimiento

A nuestra asesora Ms.C María Magdalena Alvarado Soriano, por su dedicación, esfuerzo y sacrificio en el asesoramiento para la creación de esta obra.

A Ms.C. Raúl Alfonso Dubón, por sus acertadas recomendaciones y revisión de esta obra.

Al nuestro amigo Lic. Oscar Ovidio Flores, por sus acertadas recomendaciones para la elaboración de esta obra.

Y en especial a todos mis ex alumnos del segundo de Bachillerato en Salud de la Escuela Normal Mixta “Pedro Nufio”, por su participación voluntaria en la realización de esta investigación, a quienes siempre recordaré por su colaboración, paciencia y comprensión, que Dios los ilumine siempre para el logro de sus metas.

Dedicatoria

Esta obra está dedicada especialmente con mucho amor a mi esposa Ana Isabel Mendoza, mis hijos José Enrique y José Alberto y a mi madre Alicia Rivera por ser ellos mi principal inspiración y apoyo para el logro de mis metas.

Índice

Introducción

Siendo las representaciones el único medio para llegar a los objetos matemáticos se ha desarrollado este trabajo de investigación donde se realizaron actividades encaminadas hacia la conversión de una representación a otra de la función cuadrática ya que como nos dice Duval (1999a, p. 24).

> "La actividad matemática es un tipo de actividad que, a pesar de su universalidad cultural, a pesar de su carácter puramente intelectual, supone una manera de pensar que no es nada espontánea para la gran mayoría de alumnos y de adultos. Necesita modos de funcionamiento cognitivos que requieren la movilización de sistemas específicos de representación. Estos sistemas constituyen registros de representación semiótica. Su integración a la arquitectura cognitiva de los sujetos es la condición absolutamente necesaria para poder comprender en matemática".

Tomando en cuenta que el contenido de una representación es diferente al de otra y que lo que en una representación no logramos visualizar, en otra sí, consideramos necesario realizar tareas encaminadas a la conversión de las diferentes representaciones de la función cuadrática. Cada representación es útil dependiendo lo que se desea, una tabla nos puede ayudar a visualizar valores puntuales, la gráfica nos muestra el comportamiento de esos datos, la ecuación nos puede permitir encontrar un valor determinado que la gráfica o la tabla no nos muestra, de allí la importancia del estudio de las diferentes representaciones.

En esta investigación hemos seleccionado la función cuadrática por muchas razones, entre las que podemos mencionar: su utilización en resolución de problemas aplicados en diferentes campos, por formar parte de los contenidos del currículum en los niveles de la educación secundaria y superior, por los problemas de aprehensión que existen y seguirán existiendo en el proceso de enseñanza y aprendizaje de ésta.

Hemos tomado en cuenta el uso del software de computadoras como herramienta para el proceso de enseñanza y aprendizaje de esta función porque consideramos que son un medio fundamental para potenciar el aprendizaje de los estudiantes por diferentes razones, entre ellas: la rapidez para realizar cálculos, facilidad para manipular los elementos de las diferentes representaciones, permiten que el estudiante pueda descubrir patrones, elaborar conjeturas, etc. Así que se han elaborado actividades para proporcionar las herramientas necesarias a los estudiantes para realizar el paso de una representación a otra y resolver problemas.

Esta obra está dividida en 6 capítulos, que se resumen a continuación.

Capítulo 1: En este capítulo se hace una descripción general del problema y el contexto del mismo, se presenta un panorama de diferentes trabajos relacionados con nuestro estudio, se justifica la realización del estudio y se plantean los objetivos propuestos y las preguntas que nos ayudarán alcanzar estos objetivos.

Capítulo 2: Aquí se hace una presentación de referentes teóricos que ayudaron a dar forma a nuestro trabajo de investigación considerando teorías que se tomaron en cuenta para la realización de nuestras actividades de exploración, estas teorías están enfocadas en estudio de la función cuadrática, representaciones semióticas como medio de enseñanza-aprendizaje de objetos matemáticos, tecnología como mediación de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y la modelación en las resolución de problemas con funciones cuadráticas.

Capítulo 3: Aquí se hace una presentación de la metodología utilizada en el estudio, la población y muestra tomada, el tipo de instrumentos utilizados en la recolección y análisis de datos, y una descripción de la aplicación de las actividades desarrolladas con el grupo objeto de investigación.

Capítulo 4: En éste se presenta el análisis cualitativo de la información que está relacionado con el marco teórico.

Capitulo 5: En éste se presentan las conclusiones a las que se llegó con los resultados obtenidos del análisis del estudio, las que responden a las preguntas planteadas en la investigación, también planteamos algunas recomendaciones.

Para finalizar se agregan a esta obra las referencias bibliográficas, los anexos que lo conforman las pruebas diagnóstico aplicadas, actividades desarrolladas con el grupo en estudio y algunos protocolos que se realizaron en las diferentes actividades.

CAPITULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. La función cuadrática en ambiente computacional

La enseñanza tradicional de las matemáticas en todo sistema educativo, se ha caracterizado por enfatizar en el desarrollo de algoritmos y el manejo de procedimientos que contemplan una serie de fases que deben desarrollarse de manera sucesiva y en un determinado orden sobre los objetos matemáticos, sin prestar atención a la comprensión con respecto a los procesos, se ha convertido esta disciplina en un conjunto de fórmulas que deben ser aplicadas para resolver ciertos problemas.

Con la pura enseñanza de algoritmos construimos parcialmente los conocimientos matemáticos, sin lograr que el estudiante comprenda de manera significativa los conceptos involucrados en una actividad didáctica. Nuestra experiencia en el campo educativo ha permitido observar que en las clases de matemática no se presta atención a la conversión entre las distintas representaciones de un objeto matemático. En la enseñanza y aprendizaje de la función cuadrática se enfoca únicamente en la conversión de su representación algebraica a la tabular, y por último se pasa a su representación gráfica empleando únicamente como recurso didáctico el lápiz, papel y pizarrón.

Al respecto, Duval (1999b, p. 46) señala que "Numerosas observaciones en clase, el análisis de los resultados de encuestas y evaluaciones, así como experiencias de aprendizaje, muestran que la conversión de las representaciones semióticas constituye la actividad cognitiva menos espontanea y más difícil de adquirir para la gran mayoría de los alumnos. Con mucha frecuencia, la ausencia de coordinación entre los diferentes registros genera un obstáculo para los aprendizajes conceptuales".

Consideramos que a través del uso del software matemático en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas podemos lograr la coordinación entre los diferentes registros en la *construcción de significados de la función cuadrática utilizando la computadora como recurso didáctico*, por ser herramientas que facilitan la conversión de una representación a otra, por la rapidez y exactitud con que se realizan los cálculos y la facilidad para manipular y visualizar los gráficos. A través de su empleo los estudiantes podrán descubrir patrones, establecer conjeturas, establecer conexiones de una representación a otra, descubrir ciertas características respecto a sus parámetros en relación con la forma de su representación gráfica en menos tiempo y mayor eficacia que con métodos tradicionales de papel y lápiz. En esta investigación d*ocumentamos, analizamos e interpretamos los significados que son construidos en un ambiente computacional por los estudiantes de II de Bachillerato de la Escuela Normal Mixta "Pedro Nufio"*, para ello se utilizó el software dinámico Cabri-geómètre II, Grapes y Excel.

1.2. Antecedentes

La computadora es una herramienta utilizada en diferentes disciplinas por su capacidad de almacenamiento, velocidad y precisión para realizar cálculos. Las primeras computadoras con la tecnología de tubos al vacío fueron creadas con el propósito de realizar cálculos complicados que llevaban mucho tiempo; actualmente éstas se han convertido en un instrumento apto para el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Es por eso que durante las últimas décadas, en muchos países, se han desarrollado numerosos trabajos de investigación en matemática educativa en los que se incorporan nuevas estrategias en la enseñanza como el empleo de herramientas tecnológicas en el salón de clase para la exploración y descubrimiento de ideas matemáticas.

Para el caso, en México con la creación de instituciones de investigación sobre la problemática del proceso enseñanza y aprendizaje de la matemática, tales como el Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional [Cinvestav-IPM], en el Departamento de Matemática Educativa se realizan investigaciones sobre nuevos métodos de enseñanza y uso de tecnología que intenta analizar procesos de aprendizaje utilizando nuevos métodos de enseñanza apoyada por medio de audiovisuales, calculadoras y microcomputadoras (Hitt, 1998).

Consideramos que las computadoras constituyen una herramienta poderosa para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ya que por medio de éstas hemos logrado observar como el estudiante puede manipular las distintas representaciones de los objetos matemáticos, permitiéndole descubrir patrones, conjeturar y establecer conexiones.

En el sistema educativo hondureño, específicamente en educación media, no existe evidencia del uso de estas herramientas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en algunos casos por el costo y en otras por desconocimiento del docente en el manejo del software matemático, sin embargo en el *Currículo Nacional Básico* [CNB] (2003, p. 39) encontramos que uno de los objetivos en el área de Matemática es, “utilizar el lenguaje simbólico y matemático para expresar y comunicar la información cuantitativa y cualitativa en otras áreas del conocimiento, dentro y fuera de la escuela, a través del empleo de medios informáticos”.

1.3. Justificación

La función cuadrática es aplicada en diferentes disciplinas, en los cursos elementales de Álgebra observamos la aplicación de ésta en campos como: la Geometría para resolver problemas de construcción de cercas de forma rectangular que abarcan un máximo de área y la construcción de cajas a partir de una hoja rectangular; en Física Elemental para resolver problemas de lanzamiento de proyectiles y movimiento de caída libre; en Ingeniería para resolver problemas que implican la construcción de puentes con cables que penden entre los extremos de dos torres y forman una parábola. Hitt (2002, p. 112) señala que “Para modelar fenómenos físicos es importante tanto la utilización del polinomio de segundo grado (función cuadrática), como la gráfica asociada a dicho polinomio. Es importante poder pasar de una representación a otra en la resolución de problemas”.

Al respecto, Weber (1999, p. 112) nos dice que "Existen una variedad de aplicaciones de la función cuadrática en administración y economía, las secciones de varios tipos de parábolas que quedan en el primer cuadrante, a menudo son adecuadas para representar funciones de oferta y de demanda".

De lo anterior podemos decir que, en el estudio de esta función es importante que el estudiante se familiarice y apropie de significados necesarios para el análisis y la resolución de problemas que tengan que ver con su aplicación. Para esto, existe una variedad de software especializados para una diversidad de temas matemáticos y situaciones de enseñanza y aprendizaje que permiten según muchos investigadores en Matemática Educativa, obtener un aprendizaje significativo. Por las ventajas que estas herramientas proporcionan, permiten que el educando sea un ente activo, descubridor y constructor del conocimiento.

Santos (1997, pp. 90-101), presenta varios ejemplos sobre el potencial de la tecnología, destacando autores como Schoenfeld (1988), Hitt (1996), Schwarts (1994), y otros. Explora la idea de considerar a las computadoras como elementos fundamentales en la transformación de funciones cognitivas del individuo y no sólo como instrumentos que amplifican y facilitan tales funciones. En relación a esto plantea la necesidad esencial de darle más atención a la profundidad del estudio que a la extensión o variedad de contenidos.

El uso de medios tecnológicos genera consecuencias, entre ellas; cambios en el currículum, al respecto, Moreno (1999a:1) [citado por de la Rosa (2002, p. 36)] plantea:

> "Hay dos maneras en el empleo de la tecnología computacional, una que pretende emplear los recursos computacionales para incidir en el currículum tradicional. Aquí, los recursos computacionales juegan el papel de 'suministradores de sistemas de representación' para un acercamiento a la enseñanza diseñada antes de los recursos computacionales. La otra orientación, más reciente, está generada por la

> expectativa de que el empleo de los nuevos instrumentos de mediación transformarán el currículum”.

En Honduras, a partir del 2004 se inicio a implementar el nuevo diseño curricular, denominado Diseño Curricular para la Educación Básica [DCNB] (2003), aquí el área de Matemáticas se presenta siguiendo el enfoque de resolución de problemas y la implementación de medios tecnológicos como las computadoras, en él se define la Matemática como una disciplina que sistematiza la capacidad intuitiva del ser humano de poder encontrar las ideas medias necesarias para resolver problemas. Se considera que el avance de la ciencia y de la tecnología crea un marco de oportunidades sin precedentes; modifica de manera sustancial la epistemología escolar; genera nuevas formas de producción y validación del conocimiento; y presenta un desafío no sólo a la selección, a la estructuración y a la organización de los contenidos sino que, también, a los modelos pedagógicos curriculares y didácticos.

Justificar el por qué y para qué de este trabajo, nos lleva a revisar la enseñanza tradicional de las Matemáticas, en la cual el estudiante, era un simple receptor de contenidos, memorizador de fórmulas, dibujante de tablas y de gráficos. Consideramos que lo anterior se ha dado debido al mal uso de la metodología y de los enfoques utilizados en el proceso, así como a la no utilización de un material audio-visual que permitiera establecer una clara y correcta mediación pedagógica entre el docente, el estudiante y el contenido.

Al hablar de medios audio-visuales prestamos especial atención al uso de las computadoras, ya que consideramos que éstas, complementan los métodos y enfoques que buscan formar un estudiante, descubridor y constructor del conocimiento, productor y no repetidor de textos, dueños y portadores de las competencias básicas que le permitan enfrentarse a diversos contenidos para explicarlos e interpretarlos. Entre estos resaltamos la búsqueda de un estudiante formado para evitar el temor al enfrentamiento con los objetos matemáticos, que pueda además de reconocer estos objetos, analizarlos, explicarlos, interpretarlos y expresarlos en sus diferentes representaciones, reconociendo estos objetos como textos y los signos como elementos esenciales en la estructura de los mismos y como productores de significación y transmisores de información y conocimiento.

De lo anteriormente expuesto nace la idea de realizar esta investigación y documentar la interacción del alumno con el uso de la computadora en el manejo de software matemático para la construcción de significados de la función cuadrática.

1.4. Propósito de la investigación

El interés principal se centró en analizar la influencia del uso de las computadoras en los estudiantes de II de bachillerato de la Escuela Normal Mixta "Pedro Nufio", en la construcción de significados de la función cuadrática.

De esta inquietud surgen las siguientes preguntas:

¿Qué significados es posible construir sobre la función cuadrática en un ambiente computacional?

¿Qué dificultades enfrentan los estudiantes en ambientes computacionales?

¿Qué sentidos son construidos en cada registro de representación: tabular, gráfica y ecuación?

¿Qué conexiones se les dificultan más a los alumnos entre las diferentes representaciones?

¿Cómo asocian los alumnos cada uno de los parámetros con la forma de la curva, la posición de esta con los ejes?

De las preguntas surgen los siguientes objetivos:

- Describir los resultados obtenidos por los estudiantes en el descubrimiento de las propiedades y patrones que se presentan en el estudio de las funciones cuadráticas.

- Identificar y describir las estrategias utilizadas por los estudiantes al convertir una representación semiótica de la función cuadrática en otra representación.

- Descubrir dificultades mostradas por los estudiantes en el estudio de la función cuadrática en un ambiente computacional.

CAPITULO 2
REFERENTES TEÓRICOS

2.1. La función cuadrática

El estudio de esta función resulta de sumo interés en Matemática, en Física y otras ramas del conocimiento, existe una variedad de problemas en los que podemos aplicar esta función que responde en su representación algebraica a la fórmula $y = ax^2+bx + c$, con $a \neq 0$.

La representación gráfica de la función cuadrática es una parábola con las siguientes características:

a. Si el valor del parámetro *a* es menor que cero ésta es cóncava hacia abajo y tiene un máximo, si *a* es mayor que cero es cóncava hacia arriba y admite un mínimo
b. Tiene un vértice que es el punto asociado con la curva donde alcanza su punto máximo o mínimo con coordenadas (h, k) que se obtiene de llevar la expresión $y=ax^2 + bx + c$ a la forma y=a(x-h)+k.
c. Intercepto en *y*, asociado con el parámetro *c* de la representación algebraica. Interceptos en el eje *x*, los que están asociados con la solución de la ecuación que resulta de asignar a *y* el valor de cero, en cuyo caso si tiene dos raíces reales diferentes, ésta cortará al eje horizontal (eje de las x) en dos puntos, si tiene dos raíces reales iguales cortará el eje de las x en un punto, en caso que sus raíces sean complejas, ésta no cortará el eje horizontal.
d. Tiene un eje de simetría que es la recta paralela al eje *y* que responde a la ecuación $x = \frac{-b}{2a}$.

A través de la conversión de sus distintas representaciones podemos lograr construir un aprendizaje significativo en los estudiantes, para Duval (1999a, p. 15-20) el estudio de la variedad de tipos de representaciones constituyen una necesidad para analizar los procesos de adquisición de los conocimientos matemáticos por las siguientes razones:

- Los diferentes tipos de representaciones son irreductibles entre sí, eso porque no todas las representaciones son producidas por el mismo sistema de representación.
- La conversión de las representaciones de un sistema a otro ocasiona notables problemas en el desarrollo de los conocimientos, la conversión del sistema algebraico al gráfico es más fácil que el inverso.
- El desarrollo de las Matemáticas, así como lo muestra “la historia de los números”, la del Álgebra, la Geometría, incluso del Análisis, se hace de una diversificación muy amplia de los sistema semióticos de representación.
- Una representación jamás puede ser considerada y analizada sin hacer referencia al sistema a través del cual fue producido, esto determina la relación entre su contenido y el objeto representado, en Matemática, cambiar de sistema de representación es una exigencia cognitiva necesaria y fundamental para explicar o mostrar propiedades diferentes de un mismo objeto.
- El sujeto está constituido por un conjunto complejo de sistemas productores de representaciones de diferente naturaleza.
- El acceso a los conocimientos matemáticos requiere la integración, de la arquitectura cognitiva, de los sistemas semióticos de representación que han permitido descubrir y estudiar los objetos matemáticos que ahora se enseñan.

Consideramos que la computadora es una herramienta que debido a la facilidad con que se manipulan los objetos como las representaciones gráficas de la función cuadrática permite descubrir patrones, conjeturar y establecer conexiones. Duval(1999b. p. 57) sostiene que “Una de las grandes dificultades que se presentan en el estudiante es convertir la representación gráfica de una función a su representación algebraica correspondiente”, sin embargo, mediante la manipulación de ésta en un ambiente computacional, el estudiante podrá asociar sus parámetros con la forma de su gráfica y la posición de esta con sus ejes usando software dinámico, permitiendo trasladar la representación gráfica a la expresión algebraica, siendo el estudiante quien descubre y logre construir significados. Por la rapidez y exactitud con que se realizan los cálculos podrán descubrir patrones, por ejemplo usando una hoja electrónica de cálculo se pude descubrir rápidamente que en una función cuadrática a segundas diferencias el resultado, en la representación tabular, es el doble del coeficiente del término cuadrático. Estas y otras cosas son posibles gracias a la facilidad proporcionada por la computadora en la manipulación de los objetos matemáticos.

2.2. Representaciones semióticas como medio de enseñanza-aprendizaje de objetos matemáticos

La Semiótica no es un término fácil de definir, sin embargo, es considerada como la ciencia de los signos, viendo estos como elementos fundamentales de toda actividad cognoscitiva. Tomando en cuenta lo anterior la Semiótica se puede ver además de ciencia, como un auxiliar para el estudio de otros saberes, entre ellos: el estudio de un objeto matemático, ya que este se hace mediante una variedad de sistemas semióticos de representación para la comprensión de su significado por ser estos medios más eficaces para accesar a los mismos.

Duval (1999a, p. 24) sostiene que “La actividad matemática es un tipo de actividad que, a pesar de su universalidad cultural, a pesar de su carácter puramente intelectual, supone una manera de pensar que no es nada espontánea para la gran mayoría de alumnos y de adultos. Necesita modos de funcionamiento cognitivo que requieren la movilización de sistemas específicos de representación. Estos sistemas constituyen registros de representación semiótica. Su integración a la arquitectura cognitiva de los sujetos es la condición absolutamente necesaria para poder comprender en matemática”.

Para el caso en el estudio de la significación y compresión de la función cuadrática, el pasar de una representación a otra es muy importante ya que permite visualizar ciertas propiedades con mayor claridad en una que en otra. Además, es a través de la conversión de las distintas representaciones que se obtiene un aprendizaje significativo.

Para Ausubel (2000) [citado por Ballester, 2002, p. 18], “con el aprendizaje significativo el alumnado da sentido a aquello que puede tener sentido, a lo que puede comprender, a lo que está dentro de su campo próximo de aprendizaje, ya que fuera de esta zona próxima no nos puede entender. El aprendizaje significativo da al alumnado los elementos de anclaje en la experiencia propia de los conceptos nuevos que se presentan de manera coherente e interconectada. El aprendizaje es por tanto un proceso de construcción individual y personal, los humanos integramos dentro de las estructuras de conocimiento aquellos conceptos que tienen en cuenta y se relacionan con lo que ya sabemos".

Si tomamos el planteamiento anterior, vemos que en éste resaltan dos elementos fundamentales: el contenido y su relación con la adquisición que el estudiante hace del mismo; siempre y cuando este contenido o nuevo contenido, sea de utilidad para la solución de problemas tomando en cuenta que todo aprendizaje desde el punto de vista de Ausubel es personal e individual.

El problema en el caso de la función cuadrática, es y ha sido cómo facilitar al estudiante los recursos para que pueda además de representar la función, interpretarla; tomando en cuenta que no existe una sola representación sino que el estudiante debe estar consciente que se deberá enfrentar a diferentes tipos de representación de una función.

Janvier (1987) [citado por Font, 2001, p. 181], en sus trabajos sobre el concepto de función, considera que las representaciones asociadas al concepto de función se pueden clasificar en cuatro clases (expresión verbal, tabla, gráfica, y expresión analítica) que, aunque idealmente contienen la misma información, ponen en función diferentes procesos cognitivos, cada uno de ellos estrechamente relacionado con los otros. La representación verbal se relaciona con la capacidad lingüística de las personas, y es básica para interpretar y relacionar las otras tres; la representación en forma de tabla se relaciona con el pensamiento numérico; la representación gráfica se conecta con las potencialidades conceptualizadoras de la visualización y se relaciona con la Geometría y la Topología; mientras que la expresión analítica se conecta con la capacidad simbólica y se relaciona principalmente con el Álgebra.

Consideramos que desde el punto de vista semiótico todo sistema de signos que comunica algo es un texto, de allí que cualquier representación, sea analítico, sea gráfico o de tabla, deben verse como productoras de información, el problema será cómo lograr convertir ese signo matemático en un signo lingüístico, explicable e interpretable por parte del estudiante, de allí que el NCTM (2003, p. 369), cita a, Yerushalmy y Schwartz (1993); Moschkivich, Shoenfeld y Arcavi (1993), quienes señalan que, "Es importante resaltar las maneras en que representaciones distintas de los mismos objetos pueden transmitir diferente información, y enfatizar la importancia de seleccionar representaciones que convengan a las tareas concretas de que se trate".

Lo anterior es reforzado por Chevallard (1991, p. 8) [citado por D'amore, 2004, p. 2], para quien la idea de un objeto matemático se concibe como: "un emergente de un sistema de prácticas donde son manipulados objetos materiales que se desglosan en diferentes registros semióticos: registro de lo oral, palabras o expresiones pronunciadas; registro de lo gestual; dominio de la inscripción, lo que se escribe o dibuja (grafismos, formulismos, cálculos, etc.), es decir, registro de lo escrito".

Sobre las representaciones en Matemática Educativa los diferentes autores coinciden en que el papel de éstas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, es fundamental para el desarrollo de los procesos cognitivos del ser humano, a continuación mostramos y analizamos algunas de las teorías al respecto:

Castañares (2005) nos cita a Charles Pierce(1896), quien nos dice que, el razonamiento matemático consiste en construir un diagrama de acuerdo con un precepto general, en observar ciertas relaciones entre partes de ese diagrama -relaciones que no están requeridas de manera explícita por el precepto-, en mostrar que estas relaciones valdrán para todos los diagramas tales, y en formular esta conclusión en términos generales, los diagramas peirceanos incluyen tanto las fórmulas algebraicas como los gráficos geométricos.

Como se puede observar para Pierce ningún elemento de forma aislada es capaz de producir procesos de significación esto se logra sólo dentro de contextos y estableciendo relación o relaciones con otros elementos, sean de la misma o diferente manifestación, veamos a Gardner (1985), [citado por Santos, 1997, p. 59], quienes se dedican a las ciencias cognitivas ponen atención al análisis de los niveles de representación. Las entidades de representación que interesan incluyen símbolos, reglas e imágenes. Además se explora la forma en que estas entidades interactúan, se transforman, o contrastan entre sí. Esto es de utilidad para explicar el pensamiento, la acción y el comportamiento humano. La premisa fundamental para el estudio de las representaciones es aceptar que la actividad cognitiva humana debe ser descrita en términos de símbolos, esquemas, imágenes, ideas y otras formas de representación mental.

Esta idea de análisis de representación sígnica no es única, ni acabada una década después de Gardner, Goldin (1998) [citado por Godino, 2003, p. 51], "presenta la noción de sistemas de representación y sus diversos tipos como el constructo clave de un modelo psicológico unificado del aprendizaje y la resolución de problemas matemáticos. Sugiere que los avances en los campos de la Psicología, Lingüística formal, Semántica y Semiótica, junto con el estudio de las estructuras matemáticas y la necesidad práctica de comprender las interacciones de los estudiantes con los entornos basados en el uso de ordenadores han motivado un intenso trabajo sobre las representaciones y los sistemas de símbolos en la psicología de la educación matemática".

La idea es la misma producir significados y ser capaces de comunicarlo, de informarlo, teniendo en claro a la vez qué queremos o pretendemos comunicar, en ese sentido. Dreyfus (1993) [citado por Sacristán, 1997, p. 54] señala que "Las representaciones realizan una función importante en matemática. Él define representaciones externas como lo que nosotros usamos cuando comunicamos sobre matemática, como fórmulas, los gráficos, etc., Por otro lado, las representaciones mentales son aquellas que tenemos en mente cuando nosotros pensamos en un objeto matemático o procesamos, y ellos *"pueden ser inmensamente diferentes para diferentes personas"*".

Finalizamos con las teorías sobre las representaciones con el planteamiento de, Duval(1999a, p. 26), quien nos dice que, “no hay otro medio de acceso a los objetos matemáticos que las representaciones semióticas, e incluso si son rudimentarias como las primeras actividades numéricas, cuyos trazos nos vienen desde las culturas más antiguas”.

2.3. Tecnología como mediación de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas

Históricamente el hombre a empleado gran parte del tiempo en la construcción de aparatos para realizar cálculos matemáticos desde la invención del ábaco, creado unos 3000 años antes de Cristo, hasta la creación de computadoras electrónicas donde los avances se han presentado de manera acelerada mejorando la capacidad de almacenamiento, velocidad, tamaño, entre otras cosas.

Con el desarrollo evolutivo de estos aparatos, se han desarrollado software de matemáticas con elementos didácticos significativos que promueven el mejoramiento del proceso de enseñanza y aprendizaje de esta disciplina, los estudiantes a través de su interacción con un software matemático puede obtener un aprendizaje significativo de temas que han representado para ellos dificultades cognitivas con el uso únicamente de lápiz y papel.

El uso de esta tecnología ha incidido en el currículo de muchos países, por ejemplo en Estado Unidos, The National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2003, p. 26), en sus Principios y Estándares para la Educación Matemática, incorpora el Principio Tecnológico, señalando que “La tecnología es fundamental en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; influyen en las matemáticas que se enseñan y enriquece su aprendizaje”. Las calculadoras y las computadoras, son herramientas esenciales para enseñar, aprender y hacer matemáticas. Proporcionan imágenes visuales de ideas matemáticas, facilitan la organización y análisis de datos y hacen cálculos con eficacia y exactitud.

En estos principios y estándares se señala que “cuando disponen de estas herramientas tecnológicas, los alumnos pueden centrar su atención en tomar decisiones, reflexionar, razonar y resolver problemas logrando potenciar los conocimientos e intuiciones básicos. Mediante las calculadoras y computadoras pueden examinar más representaciones o ejemplos en menos tiempo que los que son posibles a mano, y así, pueden formular y explorar conjeturas fácilmente. La potencia gráfica de los instrumentos tecnológicos permiten el acceso a modelos visuales que son poderosos, pero que muchos estudiantes son incapaces de generar independientemente o no están dispuestos a hacerlos” (pp. 26-28).

En Honduras, en el documento del segundo ciclo del CNB (2003, p. 371), se considera la informática no como parte de la matemática, sino como herramienta para resolver problemas matemáticos. En la enseñanza de la Matemática, juega además un papel como herramienta didáctica para facilitar el aprendizaje de ciertos conceptos matemáticos.

En este mismo documento una de las expectativas de logro del campo del Área de Matemática es que los alumnos y alumnas al finalizar su Educación Básica sean capaces de utilizar apropiadamente calculadoras electrónicas y computadoras para resolver problemas matemáticos. La incorporación de estos aparatos electrónicos según el CNB se hará a partir del Segundo Ciclo (alumnos en edades comprendidas de 9 a 12 años), continuando en el Tercer Ciclo (alumnos de 12 a 15 años). El Área de Tecnología en estos ciclo de la Educación Básica, se concibe como un espacio para la reflexión sobre uno de los aspectos más complejos, importantes y contradictorios de nuestra vida en sociedad: la Tecnología (p. 372).

Investigaciones realizadas en Matemática Educativa muestran que la computadora por la capacidad para representar un objeto a través de las diferentes representaciones logran potenciar el aprendizaje de los estudiantes, Kaput(1994) [citado por Estrada, 2005, p. 33], señala que “la tecnología es una infraestructura representacional que amplía las potencialidades del pensamiento humano, afirmando que estas nuevas herramientas conducen a nuevas maneras de pensar o razonar. Por ejemplo, las gráficas apoyan un rango de formas que es considerablemente más amplio de la que pueden ser expresadas en la forma cerrada del álgebra simbólica y más específico a particulares técnicas de razonamiento”.

Consideramos que con el uso adecuado de las computadoras como mediadoras del proceso de enseñanza aprendizaje por las facilidades que éstas proporcionan en la manipulación de diferentes representaciones de una función a través de software dinámico y software gráfico se deben desarrollar actividades que permitan la elaboración de conceptos que tradicionalmente con lápiz y papel representan dificultades cognitivas, encaminadas hacia la resolución de problemas mediante la exploración de las distintas representaciones, de forma tal que conduzcan al alumno a la reflexión. Respecto a esto, Hitt(2003, pp. 213-221), plantea que “la tecnología, servirá como herramienta fructífera para la construcción de conceptos matemáticos más profundos que se reflejen en procesos exitosos por parte de los estudiantes en la resolución de problemas. Para ello, es necesario implementar en el aula de matemáticas tareas en las que la actividad matemática demande el uso coherente de diferentes representaciones”.

Como puede verse, a través del uso de las computadoras se puede lograr en el estudiante la atención y la motivación, ya que la mayoría de ellos gozan de las maravillas de las que disponen estos medios, al respecto Schwartz (1995) [citado por Sacristán, 1997, p. 63], describe “el potencial de la tecnología de la computadora para crear ambientes en los que los estudiantes pueden construir conocimiento general por medio de la exploración de casos particulares. Schwartz comparte la postura de Piaget que los aprendices deben tomar un papel activo en la construcción de su conocimiento”.

En todo sistema educativo, la falta de capacitación docente en el manejo de software matemático, falta de recursos y en algunos casos la actitud negativa, hace que se sigan empleando viejas técnicas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de esta disciplina. A través de la experiencia se ha observado que en el caso de la función cuadrática, está esquematizado el proceso de enseñanza, presentando en su orden la representación algebraica, pasando luego a su representación tabular y de esta a su representación gráfica. Como resultado de trabajos de investigación en Educación Matemática, Hitt (2003, p. 216), señala que en general el sistema algebraico es el preferido por los profesores de Matemáticas en su práctica docente.

2.4. La modelación en la resolución de problemas con funciones cuadráticas

Un aspecto importante que debemos considerar cuando tratamos sobre el estudio de la función cuadrática es la pregunta que muchos estudiantes se hacen, ¿para qué me servirá esto?, por lo que se debe considerar de manera cuidadosa la selección de expresiones y fenómenos que representen o puedan ser modelados a través de ésta función, ya que hemos observado que en su tratamiento en clase en la mayoría de los casos no existe un enfoque hacia la resolución de problemas, existiendo una variedad de aplicaciones en diferentes campos como la Física, la Ingeniería, Ciencias Económicas y otras.

Para muchos educadores que hacen uso del enfoque de resolución de problemas creen que éste consiste en plantear una serie de ejercicios que el alumno debe resolver por su cuenta. Aunque es una tarea difícil, el papel del educador debe ser el de facilitador que ayude al alumno en la búsqueda de soluciones, ya que éstos ante un problema, muchas veces se desentienden del mismo por falta de comprensión, no tiene ideas o no las buscan para resolverlo. Sobre esto, Polya (1965, p. 25) señala que el estudiante debe adquirir en su trabajo personal la más amplia experiencia posible. Pero si se deja solo frente a su problema, sin ayuda alguna o casi sin ninguna, puede que no progrese.

El no lograr encontrar un procedimiento que le permita descubrir la clave para resolver un problema en la mayoría de los casos se debe a la falta de aplicación del enfoque resolución de problemas, o el mal empleo que se hace del mismo. Santos (1997, p.27), cita a Schoenfield (1985) quien, usa el término *problema* para referirse a una tarea que es difícil para el individuo que está tratando de hacerla. El mismo Santos (1997, p. 29), cita a Polya (1962) quien establece que "Tener un problema significa buscar conscientemente alguna acción apropiada para lograr una meta claramente concebida pero no inmediata de alcanzar”.

Además, Polya (1965, pp. 28-40), señala que para resolver un problema se necesitan cuatro fases fundamentales con una relación de preguntas que nos pueden conducir a la solución final. Es necesario que antes de resolver un problema se expliquen estas fases al alumno por lo que el docente está en la obligación de manejar correctamente este enfoque para una mejor aplicación del mismo, estas fases mencionadas por Polya se describen a continuación con algunas de las preguntas sugeridas por el autor, claro que éstas dependerán de las circunstancias y de la habilidad del docente en su aplicación:

1. Comprensión del problema. En este sentido inicialmente el alumno debe comprender el enunciado verbal del problema, aquí juega un papel importante la formación lingüística de éste, para comprobarlo el alumno deberá repetir el enunciado sin titubeos y separar las partes del problema como ser las incógnitas, los datos, la condición.

   El docente puede constatar lo anterior a través de preguntas como: ¿qué nos piden, qué buscamos?, ¿qué nos dan, qué tenemos?, ¿cuáles son las condiciones?, ¿se entienden/comprenden las definiciones?, ¿puede dibujarlo o introducir una notación adecuada?, ¿podría definir el problema de un modo más familiar?, ¿es posible satisfacer las condiciones?. La experiencia ha permitido observar que una de las mayores dificultades de los alumnos radica en la interpretación o compresión del problema, muchas veces no logran explicarlo correctamente, no identifican incógnitas, ni los datos que se dan en el problema y cuando estos contienen datos que juegan el papel de distractores la cosa se vuelve aun peor porque no hayan que hacer con ellos y los usan de cualquier manera, ésta es una de las principales causas para el fracaso del alumno en la resolución de problemas, si esta etapa no es superada las siguientes fases serán un fracaso.

2. Concepción de un plan: Tenemos un plan cuando sabemos, al menos a “groso modo”, qué cálculos, que razonamientos o construcciones habremos de efectuar para determinar la incógnita. Lo mejor que puede hacer el docente por sus alumnos es conducirlos a esa idea brillante que lo llevará a la solución. Para ello es con frecuencia adecuada abordar un trabajo planteándose preguntas como las siguientes: ¿conoce algún problema relacionado?, ¿puede usted hacer uso de él?, ¿puede enunciar el problema en forma diferente?, ¿ha empleado todos los datos en el problema relacionado?, ¿ha hecho uso de toda la condición?, ¿se puede usar éste para la solución del nuevo problema?.

3. Ejecución de un plan: Poner en pie un plan, concebir la idea de la solución, ello no tiene nada fácil. Hace falta, para lograrlo, el concurso de toda una serie de circunstancias: conocimientos ya adquiridos, buenos hábitos de pensamiento, concentración, y lo que es más, buena suerte. Es mucho más fácil llevar al cabo el plan. Para ello lo que se requiere sobre todo es paciencia.

4. Visión retrospectiva: Se debe reconsiderar la solución, reexaminar el resultado y el camino que les condujo a ella, con esto se podrían consolidar sus conocimientos y desarrollará sus aptitudes para resolver problemas, además pude permitir corregir errores que se hayan cometido. ¿Se puede verificar el resultado?, ¿se puede obtener el resultado de modo diferente?, ¿puede verlo de golpe?, ¿se puede utilizar el resultado o el método para resolver algún otro problema?

El enfoque requiere de una constante preparación, tanto para el docente como para el alumno, de tal forma que adquiera una capacidad y agilidad mental para resolver problemas. Inicialmente debe existir compromiso del docente en conocer las teorías sobre este enfoque para poder conducir al alumno en su aplicación y prepararlo para que vaya tomando el protagonismo principal hasta que logre hacer su trabajo de manera independiente.

Las ideas anteriores nos guiaron a diseñar actividades de tal manera que a través de una construcción dirigida se construyeran significados de la función cuadrática para el paso de una representación a otra y la resolución de problemas, tomando en cuenta en la mayoría de los casos los conocimientos previos de los estudiantes.

CAPÍTULO 3
METODOLOGÍA

3.1. Tipo de investigación, selección de la población y muestra, etapa de preparación

El presente estudio es una investigación cualitativa, con un corte exploratorio con el que se pretende describir los procesos cognitivos más destacados del grupo objeto de investigación, en la construcción de significados de la función cuadrática en ambiente computacional, mediante el desarrollo de actividades especialmente diseñadas para tal fin.

Esta investigación se llevó a cabo en el año dos mil siete, para ello se consideró una población compuesta por un grupo de estudiantes de segundo de bachillerato con orientación en salud que contenía un número de 60 estudiantes en edades de 15 y 18 años de la jornada matutina de la Escuela Normal Mixta "Pedro Nufio", distribuidos en dos secciones de 30 cada una. Se tomó en cuenta únicamente estos grupos por ser éstos con los que mayor interacción se tenía, además de contar con la oportunidad de llevar simultáneamente el curso de Matemática e Informática.

Por la naturaleza del estudio, para la muestra, únicamente se consideró la disponibilidad de tiempo por parte de los estudiantes para el desarrollo de las actividades propuestas, se tomó solamente a 10 alumnos de la población y se tomaron de una sola sección para evitar problemas de horario en las sesiones de trabajo. Se considera un grupo pequeño ya que nuestro interés no es el de generalizar resultados del estudio, además la recolección de datos en este tipo de investigación se debe hacer de manera individual y las actividades se desarrollaron con toda la muestra al mismo tiempo, lo que pudo crear dificultades en la captura de datos si se hubiese considerado un gran número de estudiantes.

Los alumnos seleccionados fueron:
Dasly Escarleth Palma Flores
Maylin Meribeth Aguilera Aguilar

Owen Adalid Tover

Francia Brahancina Raudales López

Belkis Johanna Ávila Herrera

Evelyn Meriveth Aguilera Aguilar

Yanitza Betsai Hernández

Yefrin Guillermo Arias Garcia

Ericka Melissa Aleman

Walter Ramón Alvarado Banegas

Una vez seleccionada la muestra iniciamos con una capacitación de los estudiantes en el manejo del software dinámico Cabri-géomètre II, en el que se desarrollaron actividades encaminadas hacia el manejo de los elementos básicos del mismo, a continuación mencionamos algunas de ellas:

a. Dibujar puntos, rectas y segmentos.
b. Trazar rectas paralelas y perpendiculares.
c. Ubicar el punto medio de segmentos.
d. Trazar la mediatriz de segmentos
e. Trazar la bisectriz de un ángulo.
f. Realizar transferencia de medidas.
g. Trazar una recta usando la herramienta "lugar geométrico".
h. Ubicar puntos en el plano cartesiano.

Para el manejo de Grapes se desarrollaron actividades para determinar el valor numérico de una función y para graficar funciones en el plano. En el manejo de Excel no se dio capacitación ya que tenían el conocimiento básico.

3.2. Proceso de ejecución

Este trabajo inicia con una prueba diagnóstico que se llevó a cabo en la Universidad Pedagógica Nacional "Francisco Morazán" en un curso de Álgebra I, desarrollada con el propósito de comprobar que en el estudio de la función cuadrática existen problemas de aprendizaje, se seleccionaron alumnos universitarios ya que estos cuentan con el conocimiento de esta función por ser parte de los programas de estudio en diversificado.

Con el fin de preparar al educando para la toma de decisiones, con el grupo de la muestra para el desarrollo de esta investigación se elaboraron una serie de actividades que los estudiantes debían desarrollar siguiendo las instrucciones propuesta en cada una de ellas, dichas actividades fueron diseñadas de tal forma que, ellos se convirtieran en partícipes de la construcción de su conocimiento, rechazando así el modelo de trabajo tradicional donde el alumno es un ente pasivo, un simple receptor, y el profesor el protagonista principal del proceso de enseñanza y aprendizaje.

En esta investigación se implementó una metodología de trabajo que provocó de alguna manera un desbordamiento del currículo, ya que nos salimos de estos viejos esquemas donde se trata de cumplir únicamente con el vaciamiento de los programas de estudio. Las actividades estaban diseñadas de tal manera que al finalizar las mismas los estudiantes fueran capaces de realizar conversiones entre los diferentes tipos de representación de la función cuadrática, lo que tiene como consecuencia la extensión del tiempo en el desarrollo del tema. Tradicionalmente esto se ha dado únicamente a través del paso de la representación algebraica a la tabular y de esta a su representación gráfica por ser el proceso de mayor comodidad principalmente para el docente quien se despreocupa por el diseño de actividades donde el alumnos sea el protagonista principal.

Con la implementación de las actividades el papel docente debía ser de facilitador, un mediador del aprendizaje, el alumno debía convertirse en un sujeto activo, hasta cierto punto independiente y a través del uso significativo de conocimientos aprendiera a resolver problemas, no se pretende decir con esto que el alumno aprendería todo por su cuenta, sino con la mediación del docente. Dado que la construcción del conocimiento conduce a un aprendizaje significativo, las guías se elaboraron en este sentido, de tal forma que el alumno pudiera descubrir patrones, hacer conjeturas, formular hipótesis, hacer conexiones, manipular objetos matemáticos a través de software dinámico de computadoras y resolver problemas.

En vista que el tema de investigación se basó en el principio de funcionamiento cognitivo de la perspectiva de Duval (1999), es decir, en la conversión de registros. Se desarrollaron 9 actividades en las que iniciamos en una primera instancia con la elaboración del concepto de parábola con el fin de identificar claramente la gráfica correspondiente a la función cuadrática, como segunda alternativa se presentaron actividades que sugieren una exploración numérica a través de la construcción tabular donde se debían descubrir patrones para determinar si los datos corresponden o no a una función cuadrática; posteriormente, se presentaron actividades para obtener la gráfica de una función cuadrática dada su representación algebraica o tabular, y se continua con actividades de exploración de la misma con el fin de descubrir patrones y establecer conexiones.

En otras actividades se daba la representación gráfica de la función para obtener sus demás representaciones, se concluyen las actividades con la resolución de problemas usando la computadora y el uso tradicional de lápiz y papel, donde el estudiante debía traducir el lenguaje verbal al gráfico, tabular y algebraico.

Con el fin de comprobar la aprehensión de conceptos, finalizamos con la decima actividad que se llevó a cabo aproximadamente un mes después de aplicada las anteriores; ésta consistió en desarrollar una serie de ejercicios relacionados con el tema, semejantes a los planteados en una prueba diagnóstico que se realizó en la Universidad Pedagógica Nacional "Francisco Morazán" en un curso de Algebra I, donde los resultados obtenidos demostraron la existencia de problemas de aprehensión en los significados de la función cuadrática.

3.3. Análisis y recolección de la información

El análisis se centró en el aspecto semiótico-cognitivo de los procesos de interpretación de los significados de la función cuadrática en el ambiente computacional.

Los registros que se analizaron son: Representación Gráfica, tabular, algebraica y la representación verbal.

3.4. Técnicas de recolección de datos

Para la recolección de datos se emplearon las grabaciones en video y audio, las guías de trabajo utilizadas en el desarrollo de cada una de las actividades, en las que también quedaron plasmados los descubrimientos, desarrollo de procedimientos matemáticos utilizados por los estudiantes en la solución de problemas propuestos y conclusiones, también se han considerado comentarios realizados durante y después del desarrollo de las actividades y las observaciones realizadas durante el proceso.

CAPITULO 4
ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

4.1. Análisis de la prueba diagnóstico

La prueba diagnóstico se llevó a cabo con alumnos de la Universidad Pedagógica Nacional "Francisco Morazán", que cursaban la asignatura de Algebra I, el propósito era investigar que significados manejan sobre la función cuadrática, ésta fue aplicada en cinco sesiones de trabajo, inicialmente se tomó como muestra todo el grupo que comprendía una cantidad de 50 alumnos, debido a la irregular asistencia a clases, únicamente 22 de ellos realizaron todas las actividades que fueron los que se consideraron en el análisis. Cada sesión de trabajo comprendía una actividad diferente que consistía en el cambio de un sistema de representación a otro, por ser uno de los objetivos pretendidos en esta investigación. Ver prueba en el anexo No 1.

4.1.1. Actividad No. 1

En la primera actividad se planteaba la ecuación $y = x^2 + 2x - 3,$ se pedía a los alumnos determinar el valor de **y** para cada uno de los valores de **x**, completando la siguiente tabla.

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y							

Se inicia con esta actividad por ser este el primer paso planteado en los cambios de representación de una función por parte del docente en clases, así como también lo propuesto en la mayoría de textos de Matemática, de hecho es en esta actividad donde se observan mayores aciertos por parte de los estudiantes, aunque los resultados obtenidos no son satisfactorios, la siguiente tabla describe algunos de los aspectos observados en el desarrollo de la misma.

Tabla No. 1

Aspecto	Porcentaje
Determinan todos los puntos correctamente.	40.9
Comenten errores en la aplicación de la ley de los signos para la suma y multiplicación de enteros.	22.7
Usan la fórmula general para encontrar los ceros de la ecuación cuadrática.	18.18
Usan el método de factorización para encontrar los ceros de la ecuación cuadrática.	18.18

Como podemos observar en la tabla anterior únicamente 40.9% de ellos determinaron cada uno de los valores para **y** correctamente, el resto cometían errores de tipo operatorio, por ejemplo, al multiplicar dos números con distinto signo escribían el resultado positivo, al desarrollar potencias de exponente dos y base negativa escribían el resultado con signo negativo, se detectaron errores en la suma de enteros con distinto signo, para ciertos valores de **x** algunos estudiantes no realizaron ningún intento para determinar el valor de **y** correspondiente, a continuación se muestran evidencias de lo descrito.

Figura No. 1

$$y = x^2 + 2x - 3$$
$$y = -3^2 + 2(-3) - 3$$
$$y = -9 - 6 - 3$$
$$y = -18$$

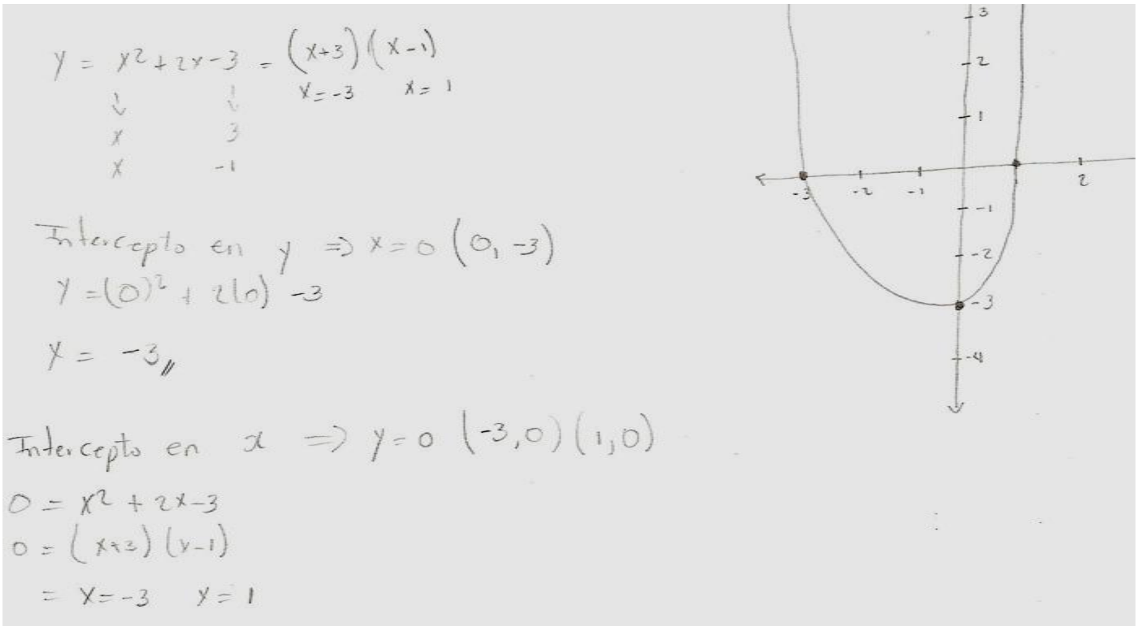
$$y = x^2 + 2x - 3$$
$$y = (-3)^2 + 2(-3) - 3$$
$$y = (9) + 6 - 3$$
$$y = 9 + 6 - 3$$
$$\underline{y = 12}$$

Ejemplo que muestran errores en operaciones con

enteros positivos y negativos, alumnos del diagnóstico

En la misma actividad identificamos otros aspectos importantes por ejemplo, el 18.18% de los estudiantes aplicaron la fórmula general para resolver una ecuación cuadrática en una variable para la obtención de **x**, cuando **y** es cero, de los cuales el 25% de ellos obtuvo los valores de la coordenada **x** correctamente. Otro 18.18% aplicó el método de factorización para resolver ecuaciones cuadráticas obteniendo los valores de **x** haciendo **y** igual a cero, de esta forma llegaron a la conclusión que, cuando **x** vale -3 ó 1 el valor de **y** es cero. Es probable, que hayan asociado estos valores con los puntos de intersección de la gráfica de la función con el eje **x**, ya que aunque no se pedía la gráfica de la función uno de ellos la dibujó, obteniendo una figura semejante a la parábola, ubicando correctamente estos puntos. Aunque, la figura obtenida no corresponde a la gráfica de la ecuación dada, parece estar claro que la representación gráfica correspondiente a esta ecuación es una parábola con dos puntos de intersección con el eje **x** y uno en el eje **y**, podemos observar en la siguiente figura este acontecimiento.

Figura No. 2



Gráfica de la función $f(x)=x^2+2x-3$, realizada por un alumno en el diagnóstico

Con lo descrito anteriormente es claro que existe un problema de aprendizaje en pasar de la representación algebraica de una función cuadrática a su representación tabular siendo este el proceso más simple de realizar de acuerdo a investigaciones realizadas por Duval (1999). Además esto nos da una pauta del procedimiento que se está siguiendo en algunos casos en la enseñanza de esta función, el cual consiste en plantear la representación algebraica y luego encontrar los puntos de intersección, entre otros, para realizar el trazo de su representación gráfica.

4.1.2. Actividad No. 2

En la segunda actividad se da la representación tabular de una función cuadrática que comprendía los pares ordenados (-3,6), (-2,1), (-1,-2), (0,-3), (1,-2), (2,1), (3,6) se pedía que ubicaran los puntos correspondientes en el plano cartesiano y dibujaran la gráfica uniendo los puntos con línea suave, en la instrucción no se consideró la secuencia que se debía seguir en la unión, en la siguiente tabla se describen algunos aspectos observados en esta actividad.

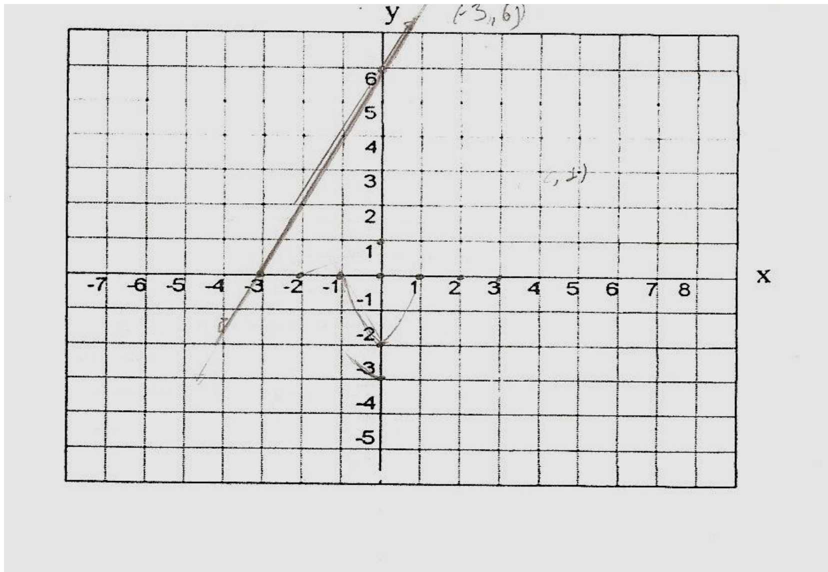
Tabla No 3

Aspecto	Porcentaje
Ubican todos los puntos correctamente.	77.27
Obtienen una parábola como gráfica.	59.09

Como podemos observar en la tabla anterior, el 77.27% ubicaron los puntos correctamente, aunque, únicamente el 59.09% unieron los puntos, obteniendo como resultado una parábola, algunos incluso ubicaron puntas de flecha en los extremos indicando continuidad. Esto es una muestra que el paso de la representación tabular a la representación gráfica es el proceso de menor dificultad para los estudiantes en comparación a los otros casos planteados; esto se da por ser el proceso de conversión donde mayor énfasis se hace en el estudio de las funciones.

No obstante se observaron serias deficiencias, por ejemplo, un estudiante al ubicar el punto con coordenadas (-3,6), marcó sobre el eje **x** el punto donde se encontraba la coordenada -3, y sobre el eje **y** el punto donde estaba ubicada la coordenada 6, trazando la recta que los contenía, lo anterior comprueba que no visualizó el plano como un todo sino que consideró cada eje como dos rectas independientes. Otro, marcó todos los puntos sobre el eje **x** donde se encontraban los valores correspondientes a la abscisa de cada uno de los pares ordenados y también traza la recta como el anterior alumno, demostrando así no tener un conocimiento claro sobre la ubicación de puntos en el plano cartesiano, como se ve a continuación.

Figura No. 3



Ubicación de los puntos (-3,6), (-2,1), (-1,-2), (0,-3), (1,-2), (2,1), (3,6), realizado por un alumno del diagnóstico

4.1.3. Actividad No. 3

En la actividad 3 se pide que grafiquen la función cuya ecuación es $y = x^2 - 2x - 8$, en un sistema de coordenadas, dándoles ya el plano en una cuadrícula con el fin de obtener una mayor precisión, la siguiente tabla muestra algunos de los aspectos observados.

Tabla No 3

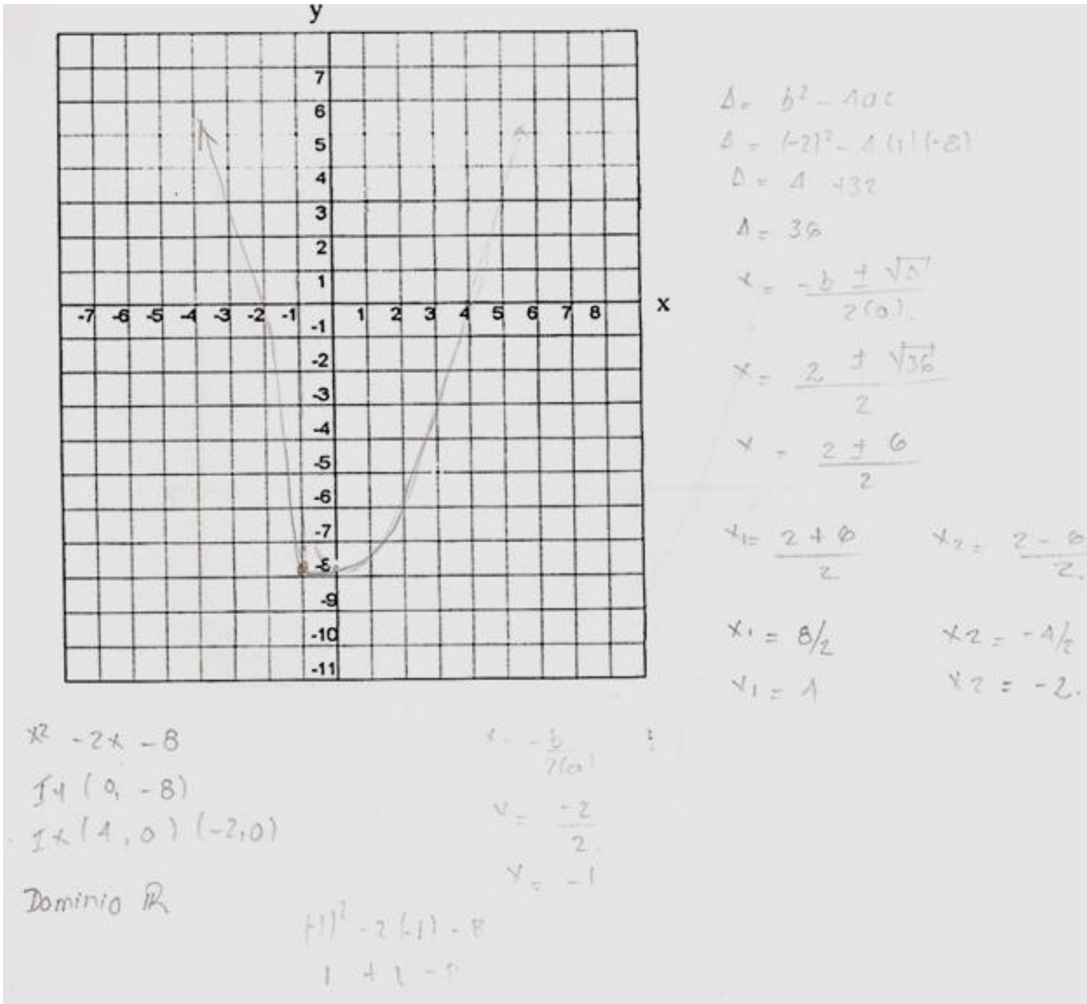
Aspecto	Porcentaje
Trazan la gráfica correctamente	18.18
Construyen una tabla de valores	27.27
No grafican ningún punto de la función en el plano cartesiano.	31.18

Como se observa en la tabla anterior, únicamente el 18.18% de los estudiantes lo hicieron correctamente, determinaron el vértice y los puntos de intersección de la parábola con el eje **x** y el eje **y.** De los que realizaron la actividad correctamente el 13.64% construyeron una tabla de valores; el 27.27% del total de los estudiantes construyó esta tabla de valores, tradicionalmente este ha sido el método de enseñanza más empleado, de esta forma los estudiantes hacen lo que representa mayor comodidad para ellos, de tal manera que termina por no considerar significados importantes como ser los puntos de intersección y el vértice de la parábola, ya que esto demanda procesos cognitivos más profundos; sin embargo, estos significados son fundamentales para la solución de problemas aplicados.

Una de las dificultades observadas a través de la experiencia es que cuando el estudiante aplica una fórmula donde a una variable se antepone el signo negativo, al sustituirla por un número negativo escriben únicamente el signo que contiene la fórmula, obteniendo así un valor incorrecto. Este caso se observó en el 9.09% de los alumnos, la gráfica que trazaron no correspondía a la función dada porque el vértice no coincidía precisamente por este tipo de error en su cálculo. Es claro que el uso de números negativos a través de la historia ha presentado dificultades en su aprehensión, sin embargo, no es este el único problema ya que si existiera el conocimiento adecuado sobre la gráfica de una función cuadrática se podrían haber percatado que la figura obtenida por ellos no era simétrica lo que les habría permitido realizar una revisión para corregir su error.

Obsérvese en la siguiente figura, cómo al aplicar la fórmula $\frac{-b}{2a}$ para obtener la coordenada **x** del vértice, teniendo que b=-2 al sustituir este valor el alumno omite uno de los signos negativos, quedando la expresión $\frac{-2}{2}$ en lugar de $\frac{-(-2)}{2}$, lo que hace que el vértice obtenido no coincida con el vértice correspondiente a la grafica de la función dada:

Figura No. 4



Gráfica de la función $f(x)=x^2 - 2x - 8$, elaborada por un alumno del diagnóstico

Continuando con la actividad observamos que el 31.82% de los alumnos no determinaron ni un sólo punto de la gráfica, escribiendo comentarios en su hoja de trabajo tales como “no entiendo”, “no sé” o “no me acuerdo”, algunos aplican la fórmula general para resolver ecuaciones cuadrática pero aparentemente sin idea para qué.

4.1.4. Actividad No. 4

En esta actividad se les dio la representación gráfica de una función cuadrática y se pedía, como objetivo principal, la ecuación correspondiente a la gráfica, además se pide adicionalmente los pares ordenados correspondientes al punto de intersección con el eje **y**, los puntos de intersección con el eje **x** y el vértice, también la ecuación del eje de simetría, obteniendo los siguientes resultados:

Tabla No 4

Aspecto	Aciertos	Errores	No contesta
Puntos de intersección con el eje **x**.	31.82%	45.45%	22.73%
Punto de intersección con el eje **y**.	22.7%	50%	27.27
Vértice	27.27%	45.45%	27.27%
Eje de simetría	22.3%	22.73%	50%
Ecuación	13.64%	9.09%	77.27%

En los puntos de intersección con el eje **x** el 27.3% de alumnos únicamente consideraban el valor de la abscisa, nos encontramos nuevamente con el caso de que los alumnos visualizan los puntos sobre los ejes como puntos de la recta real olvidando que en el plano cada punto está compuesto por un par ordenado, de éstos, observamos solamente un caso en el que escribiera correctamente las coordenadas del vértice, mostrando así la falta de un conocimiento significativo sobre las coordenadas de un punto en el plano cartesiano, estos casos no fueron considerados como aciertos.

Como se observa en la tabla solamente el 13.64% de los alumnos determinaron correctamente la ecuación, demostrando así, que éste es uno de los procesos que representa mayor dificultad para los estudiantes. Debemos señalar que ellos para encontrar ésta ecuación lo hicieron mediante el proceso de factorización usado en la resolución de una ecuación cuadrática, aquí consideraron que los valores de la abscisa en los puntos de intersección con el eje **x** correspondían a la solución de una ecuación cuadrática en una variable, obteniendo de esta manera, el producto (x-3)(x+1), en este caso como el coeficiente del término cuadrático de la ecuación de la gráfica representada es uno, este método no represento dificultad en ellos. Las interrogantes que surgen de esto son, ¿podrán obtener de esta misma forma la ecuación de una parábola donde el coeficiente del término cuadrático sea distinto de uno?, ¿tendrán conocimiento de otro método?, aunque la respuesta a esta interrogante sea "*no*", está claro que estos alumnos comprenden que la representación algebraica de una parábola es una ecuación cuadrática de la forma $y = ax^2 + bx + c$, de lo contrario no habrían encontrado esta ecuación.

4.1.5. Actividad No. 5

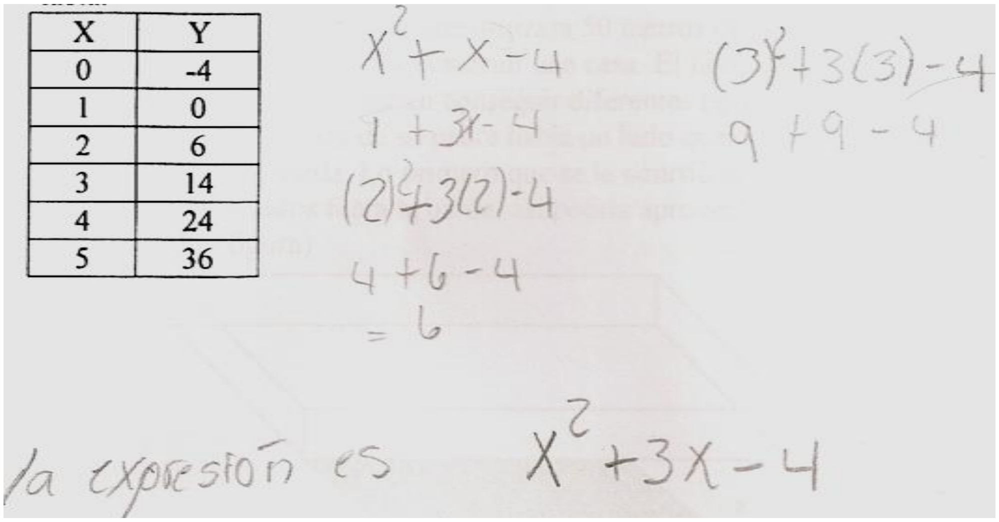
En la actividad 5 se dio la representación tabular de una función cuadrática de modo que determinaran la expresión algebraica correspondiente, obteniendo los siguientes resultados:

Tabla No 5

Aspecto	Aciertos	Errores	No contesta
Encuentra la ecuación	9.09%	31.82%	59.09

Esta es una actividad que, al igual que la anterior, quizás no se da en procesos de enseñanza y aprendizaje, pues como se muestra en la tabla anterior, únicamente 9.09% encontró la ecuación mediante ensayo y error, aunque es de destacar que están claros que cuando la abscisa es cero el valor de la ordenada corresponde al término constante de la ecuación. Cabe mencionar que los que acertaron aquí ninguno de ellos encontró la ecuación en la actividad anterior donde se daba la gráfica y se pedía que encontraran la ecuación correspondiente. A continuación se muestra uno de los procedimientos empleados.

Figura No. 5



X	Y
0	-4
1	0
2	6
3	14
4	24
5	36

$x^2 + x - 4$

$1 + 3x - 4$

$(2)^2 + 3(2) - 4$

$4 + 6 - 4$

$= 6$

$(3)^2 + 3(3) - 4$

$9 + 9 - 4$

la expresión es $x^2 + 3x - 4$

Procedimiento empleado para encontrar la ecuación de los datos representado en la tabla en un caso del diagnóstico

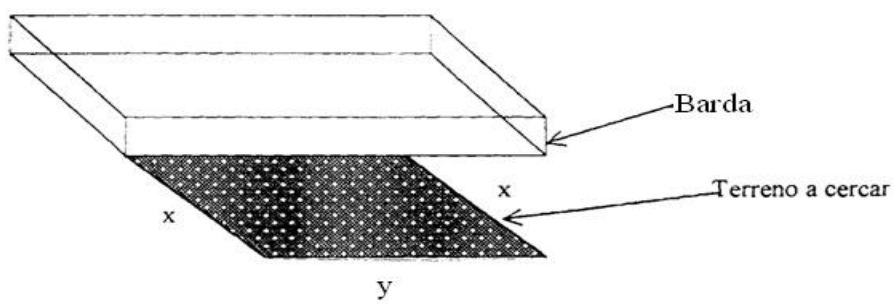
Obsérvese como este estudiante inicia con la ecuación, $x^2 + x - 4$ luego toma un valor de la tabla para **x,** en este caso el 2, al sustituir la **x** con este valor en la ecuación se da cuenta que agregando 3 al término lineal obtiene el valor deseado para **y**, prueba con un segundo valor y llega a la conclusión que la expresión es $x^2 + 3x - 4$; y aunque no sea un método 100% eficaz demanda el conocimiento de algunos significados de la función cuadrática, como por ejemplo, el punto de intersección de la gráfica con el eje **y** nos proporciona el valor de la constante de la representación algebraica, la interrogante que surge es, ¿conocerán algún método para identificar cuándo los datos representados en una tabla corresponden una función cuadrática?.

Dentro de los errores observados tenemos que, en lugar de encontrar la ecuación, el 9.09% del total graficó los puntos dados en el plano cartesiano, en uno de los casos se observó la construcción de dos polinomios de grado cinco escritos de la siguiente manera: "$0x^5 + 1x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x^1 + 5$" y "$-4y^5 + 0y^4 + 6y^3 + 14y^2 + 24y^1 + 36$", en estos polinomios se tiene que los coeficientes de cada término correspondían a los valores dados en la tabla para **x** y **y**.

4.1.6. Actividad No. 6

En la actividad 6, se pedía resolver el siguiente problema:

Un granjero le dijo a su hijo que utilizara 50 metros de alambre para cercar un terreno y que ese espacio lo utilizara para construir una casa. El hijo, muy astuto, se preguntó si con los 50 metros de alambre podría conseguir diferentes tipos de terrenos y así escoger el más grande. En los terrenos de su padre había un lado que colindaba con otra construcción donde había una barda. Lo primero que se le ocurrió al hijo fue construir la cerca de manera que uno de los lados fuera la barda, así podría aprovechar parte del alambre para cubrir más área. (Vea la figura)



- Encuentre una expresión algebraica para representar el área del terreno en función de x.
- ¿Cuál es el máximo de área que puede obtener de esta manera el hijo?

Aquí el resultado fue aún más grave ya que ningún alumno logró resolver el problema por completo, únicamente el 13.6% escribió la fórmula correspondiente al área del rectángulo sombreado en términos de **x** y **y**, así: A=x*y, el resto no realizó ningún intento para resolverlo, es evidente que la resolución de problemas representa mucha dificultad en el aprendizaje de los estudiantes tal como lo demuestra esta actividad; con esto nos atrevemos a decir que en el proceso de enseñanza y aprendizaje no se está utilizando el enfoque resolución de problemas o se está haciendo un mal uso del mismo, o simplemente se están enseñando puros algoritmos.

Del análisis anterior queda demostrado que los estudiantes participantes del diagnóstico no han tenido un aprendizaje significativo de la función cuadrática, esta es una de las razones principales que justifica nuestro trabajo de investigación.

A raíz de los resultados anteriores se preparó una serie de actividades encaminada hacia la conversión de diferentes representaciones de la función cuadrática haciendo uso de software matemático para la exploración y descubrimiento de sus significados.

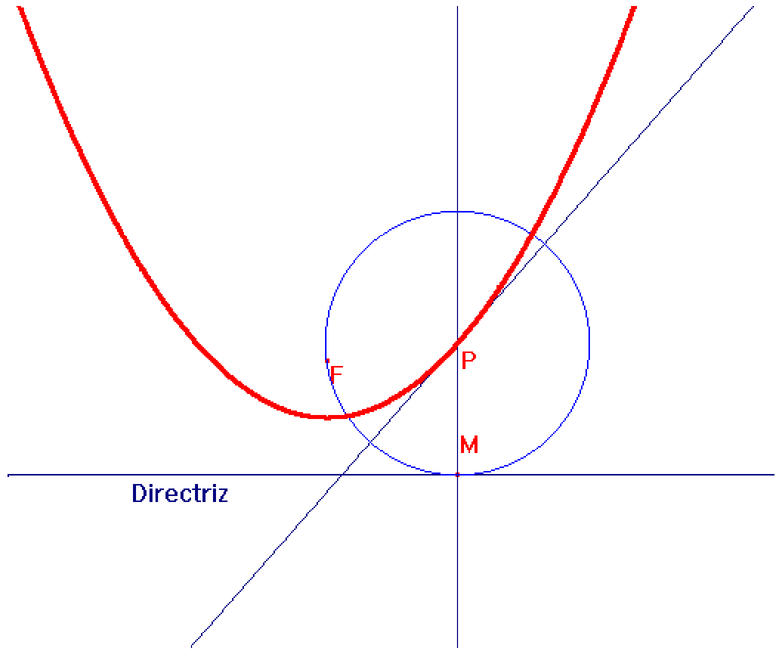
4.2. Análisis de las actividades realizadas con el grupo en estudio

Esta fase se llevó a cabo en el primer semestre del 2007 con los 10 alumnos de la sección 1 del segundo de Bachillerato en Salud de la Escuela Normal Mixta “Pedro Nufio”, aquí se desarrollaron 10 actividades con el propósito que los estudiantes construyeran los significados de la función cuadrática utilizando software dinámico Cabri-géomètre II, Grapes y la hoja electrónica de cálculos Excel. El análisis está enfocado en la descripción de los procesos más relevantes que se observaron en la aplicación de dichas actividades, así como también en la interpretación de dichos procesos, considerando las diferentes representaciones empleadas y el paso de una a otra. Ver actividades en anexo No 2.

4.2.1. Actividad No. 1

El objetivo de esta actividad era elaborar el concepto de parábola y su construcción como lugar geométrico, considerando esto como el punto de partida para la construcción de significados de la función cuadrática, auxiliándose del software Cabrí-géometre II y elementos de la Geometría, actividad que comprendía la construcción de la siguiente figura, de donde se obtiene una parábola con la trayectoria del punto P moviendo M a través de la recta directriz. Para realizar la construcción se le dio una guía donde se le incluía además, algunas preguntas de reflexión sobre las propiedades de la parábola.

Figura No. 6



Construcción de la parábola en Cabri

Se les pregunta si el punto P, es equidistante del punto F (foco) y el punto M que está sobre la recta directriz, la respuesta del 100% de los estudiantes fue afirmativa, al justificar su respuesta las explicaciones fueron diferentes pero cada una de ellos consideró que el punto P era el centro del círculo, aunque también emplean el término circunferencia, están claros que los segmento $\overline{PF}$ y $\overline{PM}$ tienen la misma longitud por que ambos son radios, antes de la actividad se les explicó que dos puntos A y B, son equidistantes de un punto C si ambos están a la misma distancia de éste, lo que muestra que el empleo del círculo como elemento auxiliar fue fundamental para darse cuenta con facilidad que efectivamente los puntos son equidistante.

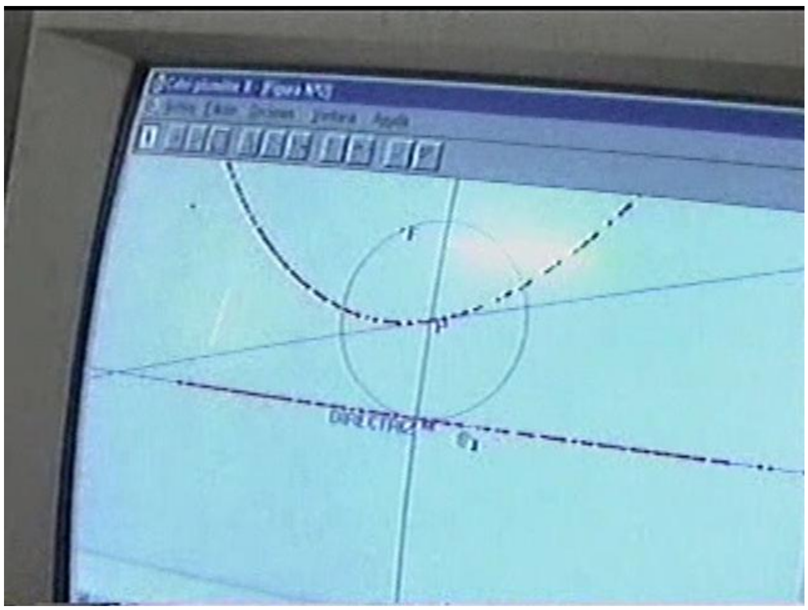
A continuación se describe el caso de Evelyn, a la interrogante ¿es el punto P equidistante del punto F y el punto M?, contesta, "*sí, porque la definición de circunferencia es que... es el conjunto de puntos que todos son equidistantes, entonces cualquier punto que agarre de aquí a acá va a ser igual*", mientras explica señala el punto P y diferentes puntos sobre la circunferencia, es evidente que la alumna tiene claro que siendo P el centro del círculo, entonces dados dos o más puntos sobre la circunferencia estos estarán a igual distancia respecto a ese punto.

En la figura formada al emplear la herramienta "**Traza activa**" de Cabri, todos identificaron que se trataba de una parábola, sin embargo Dasly en su hoja de trabajo dibujó su representación gráfica sin escribir el nombre de la misma, no por desconocimiento, porque al hacerle la pregunta responde, que es una parábola, todos coincidieron en que sus puntos no eran colineales, porque no estaban en una misma recta, mencionan además, que la parábola es una curva.

En la interrogante, ¿se puede dibujar la parábola mediante la unión de pequeños segmentos de recta?, el 90% contestó que no porque la parábola era una curva y al hacerla con segmentos dejaría de ser curva, Ericka, contesta, "*no*" al explicar por qué, inicialmente dice, "*para mí no, no sabría explicarle pero para mí no*", ante la dificultad para explicar, espontáneamente se apoya de un dibujo que hace en su hoja de trabajo representando parte de una parábola y en un extremo de su dibujo traza unos segmentos y menciona *"en este caso quedarían esquinitas"*, mostrando así la importancia de las representaciones como auxiliar valioso para expresar su pensamiento, al mismo tiempo muestra que, no tiene dificultad en reconocer la representación gráfica de la parábola, finalmente dice que es una curva, para Duval(1999a, p. 59), "un dibujo reemplaza la explicación o la definición de un término; el croquis de un objeto muestra lo que designa una palabra o una expresión del enunciado".

Dasly, a esta misma interrogante contesta, "*sí*", le preguntamos cuáles son los segmentos y señala el segmento que va del punto F (foco) al punto P (que está sobre la parábola), también señala la recta tangente a la parábola pero hace una rectificación inmediata y dice "*esa no porque es una recta*", ante la duda sobre la compresión de la pregunta se le aclara que se trata únicamente de la parábola, de igual forma contesta "*sí se puede dibujar la parábola mediante la unión de segmentos"*, en este caso hay que considerar que la abertura de esta representación gráfica era mayor que la de sus compañeros, por otro lado la parábola que se obtenía mediante la traza activa, no estaba completamente rellena, en unas partes se observaba una sucesión de puntos separados, dando la impresión en algunos sectores, tener pequeños segmentos, lo que pudo provocar tal confusión en ella, dificultad que podemos tener en cualquier dispositivo de representación gráfico. A continuación mostramos la figura obtenida por ella.

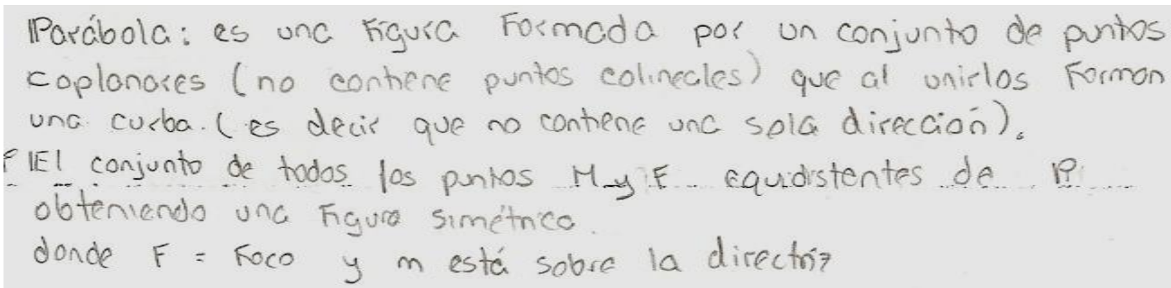
Figura No. 7



Construcción de la parábola realizada por Dasly en Cabri

Respecto a la elaboración del concepto de parábola, en la mayoría de los estudiantes se notó dificultad al expresar sus ideas escritas en papel, esto probablemente se debe a que el estudiante no está acostumbrado a construir sus propias definiciones y es que existe una dependencia de una enseñanza respaldada en el desarrollo de las clases donde primero se presenta la definición sobre el tema y luego el desarrollo de ejercicios, no se da lugar a que el estudiante piense y sea él quien llegue a la construcción de su conocimiento, "el aprendizaje matemático significa llegar a dominar un discurso que sea reconocido como matemático por interlocutores expertos" (Kieran, Forman y Sfard, 2001, p. 5) [citado por Godino (2003)], por esta razón se trata que el alumno vaya formulando conceptos de acuerdo a la aplicación de ciertas propiedades. En esta actividad el 90% de los estudiantes hacen uso de elementos básicos como ser, el punto F (foco), el punto M que está sobre la directriz y el conjunto de puntos que forman la parábola que equidistan de los puntos M y F, la siguiente es la definición presentada por Maylin.

Figura No. 8

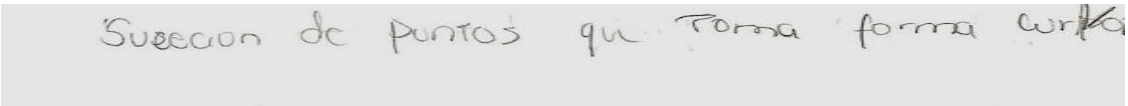

Parábola: es una figura formada por un conjunto de puntos coplanares (no contiene puntos colineales) que al unirlos forman una curba. (es decir que no contiene una sola dirección).
F El conjunto de todos los puntos M y F equidistentes de P
obteniendo una figura simétrica.
donde F = Foco y m está sobre la directriz

Concepto de parábola, elaborado por Maylin

En esta definición se puede observar redundancia en sus frases específicamente lo escrito entre paréntesis, ante la inseguridad en la redacción de su texto ve la necesidad de aclarar aun más su idea en otras palabras. Además algunos estudiantes creen que entre más escriben, su trabajo será mejor, lo importante para ellos puede ser la cantidad y no calidad de lo que escribe, finalmente tanta palabra empleada la lleva a una confusión, ya que de acuerdo a lo escrito en su segundo párrafo, P es un punto fijo y F un conjunto de puntos al igual que M, esto es más un error de redacción que conceptual por el hecho que al identificar la figura que formó con la traza activa sin ninguna vacilación dijo que era una parábola, lo que muestra que ella pudo visualizar que mediante el punto P se obtenía tal figura.

Yefrin, en su concepto únicamente menciona que es una sucesión de puntos que forma una curva, siendo el único en excluir el Foco, el punto M que está en la directriz y el término equidistante, simplemente para él la parábola es una curva aparentemente sin ninguna propiedad, a continuación mostramos su concepto.

Figura No. 9



Concepto de parábola, elaborado por Yefrin

Al definir una curva como la parábola hay que considerar lo que nos plantea Descartes [Citado por Font, (2001, p. 185)] sobre el concepto de curva geométrica nos dice que "la traza que produce un punto que se mueve por un instrumento articulado compuesto por diversas reglas, de manera que el movimiento efectuado sobre una regla se transmite por diferentes reglas del instrumento y hace que el punto se mueva trazando una determinada curva". Esta manera de entender la curva —y la introducción implícita del sistema de coordenadas— hace que Descartes pueda encontrar la expresión algebraica de la curva. Lo que finalmente hará que el alumno comprenda que una parábola conduce a un tipo de expresión que cumple ciertas condiciones.

Con esta actividad se logró que el estudiante visualizara la parábola como un conjunto de puntos que cumplen ciertas propiedades, logrando descubrir que su gráfica es una curva y que no existen tres o más de sus puntos que estén alineados, de aquí que al realizar el paso de una de sus representaciones de la función cuadrática a su representación gráfica o viceversa no exista confusión con otro tipo de función.

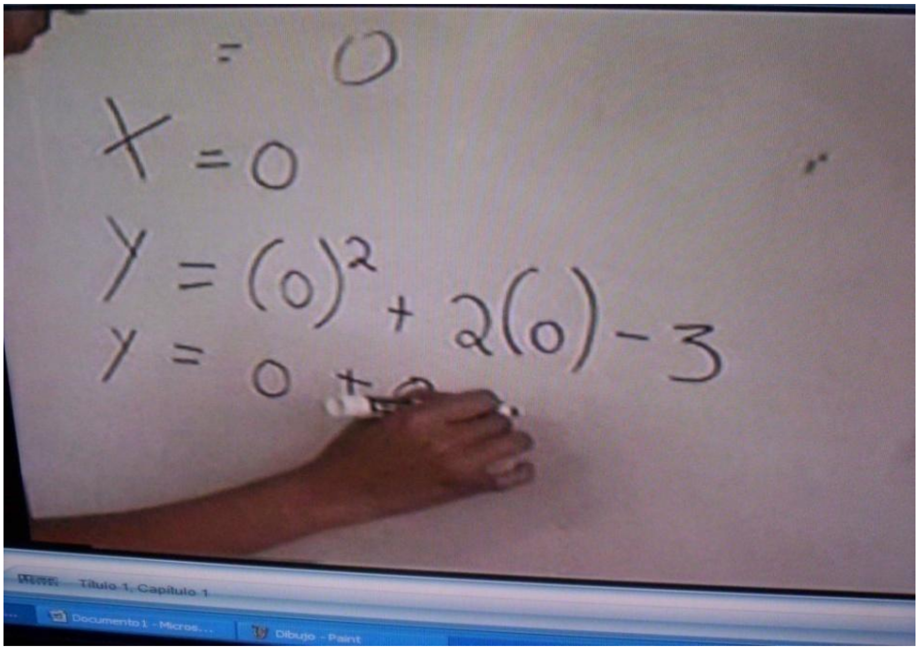
4.2.2. Actividad No. 2

Dada la importancia que tiene pasar de una representación a otra en la apropiación de los conceptos matemáticos, esta actividad fue desarrollada con el propósito que el estudiante a través de la representación tabular de una función, determine si ésta corresponde a una cuadrática para posteriormente en otras actividades pueda construir su representación gráfica y algebraica, la actividad inicia con la proposición de la ecuación $y = x^2 + 2x - 3$, y con el uso de Excel calcular el valor numérico de la función para valores enteros de **x** entre -3 y 4, se les dio la fórmula que debían utilizar, ya que mostraron poco dominio en el uso de éstas en Excel, específicamente el empleo de referencia de celda absoluta, como $D$2, que permitió escribir por separado los valores de los parámetros **a, b** y **c** y evaluar rápidamente varias funciones usando la misma tabla.

Una vez obtenido los valores correspondientes, se preguntó si los datos de la tabla pertenecían a una función, el 90% de los alumnos contestó que sí es una función, la explicación dada por Francis, fue, *"porque a cada elemento de x le corresponde un elemento de y"*, es probable que ella identifique claramente una función pero al explicar no considera el hecho que **y** debe ser único para cada **x**.

Erika, contestó, *"si"*, y explica, *"porque el valor de* -3 *es* -57, *el de* -2 *es* -19 *o sea, para cada elemento de x hay un sólo, hay un elemento de y"*, evidentemente los datos que ella tenía en la tabla describían una función pero estos no pertenecían a los de la función propuesta inicialmente, esto debido que aun dándoles la fórmula en su hoja de trabajo, no la escribió correctamente. Se observó que el empleo de fórmulas en Excel representa cierto grado de dificultad en algunos estudiantes por lo que también se les pidió hacer los cálculos en la pizarra para verificar los resultados y corregir los errores en la fórmula para poder lograr el objetivo; en el desarrollo de los cálculos en el pizarrón no mostraron ningún problema, sin embargo, como se observa en la figura siguiente, Evelyn al determinar el valor de **y** cuando **x** es cero, hizo el desarrollo completo de la operación, parece no tener claro que el valor que obtendría, debía ser el valor del término constante.

Figura No. 10



Evelyn calculando el valor de y cuando x es cero en la función $f(x)=x^2 + 2x - 3$

Maylin, contestó *"no"*, al momento de hacerle la pregunta, ella había completado la tabla, ya tenía las primeras y segundas diferencias, considerando que esto le pudo causar dificultad en su apreciación se hizo de nuevo la pregunta, aclarando, que considerara únicamente los datos de la columna donde estaban los valores de **x** y los valores de **y**, de igual manera contesto, *"no"*, y explica, *"no porque se repiten"*, señalando dos de los valores en la columna correspondiente a donde -1 aparecía en dos ocasiones. Los valores que tenía en su tabla correspondían a la función $y = 2x^2 + 6x + 3$, donde el valor de **y** es -1 para **x**=-2 y para x=-l, ante la confusión se le pregunta la definición que conoce sobre función, contestando, *"que a un elemento de x se le va asignar un único elemento en y"*, teóricamente se observa que maneja el concepto pero no había llegado a comprender el significado de la misma, ya que no logró identificar que los datos obtenidos pertenecían a una función hasta después de hacerle reflexionar sobre lo planteado en su definición y los datos obtenidos en la representación tabular.

Luego de obtener los valores correspondiente en las primeras y segundas diferencias, para todos fue claro que en la representación tabular de una función cuadrática, si los valores de x están distribuidos en serie, las diferencias $\mathbf{y_n - y_{n-1}}$ varían, pero la diferencia de estos valores, es decir, las segundas diferencias, permanecen constantes, para lograr tener los valores **x** en serie se usó el "autorrelleno" de Excel con el fin de evitar errores al transcribir los datos. Dado la rapidez con que se realizan los cálculos pudieron determinar este patrón con diferentes funciones cuadráticas únicamente cambiando los valores de los parámetros.

Como se puede observar, en la siguiente figura tenemos un ejemplo en la hoja de cálculos Excel de lo descrito anteriormente, en la columna E, F y G se tienen los parámetros **a**, **b** y **c** de la función $f(x) = 2x^2+6x+3$, los cuales el alumno podía cambiar según la función indicada.

Figura No. 11

	A	B	C	D	E	F	Barra de fórmu
1	X	Y	Primeras Diferencias	Segundas Diferencias	**a**	**b**	**c**
2	-3	3	4	4	2	6	3
3	-2	-1	0	4			
4	-1	-1	-4	4			
5	0	3	-8	4			
6	1	11	-12	4			
7	2	23	-16	4			
8	3	39	-20				
9	4	59					
10							
11							
12							

Cálculo de las segundas diferencias en Excel de una función cuadrática en su representación tabular

Una vez descubierto el patrón el alumno está preparado para determinar si los datos de una función en su representación tabular corresponde a una función cuadrática, importante para pasar de este sistema de representación al sistema de representación gráfico o algebraico.

El uso de las computadoras crea en ocasiones una dependencia automática en el alumno, esto se pudo observar en la parte final de la actividad donde se proponían varias funciones en su representación tabular y ellos tenían que determinar cuáles eran cuadráticas, la instrucción era la siguiente: "De las funciones representadas por los datos de cada una de las siguientes tablas, encierre en un círculo los incisos que corresponden a funciones cuadráticas". Como podemos ver, aquí no se les dijo a los alumnos que debían hacer, con el descubrimiento del patrón, de inmediato recurrieron a realizar los cálculos de las primeras y segundas diferencias haciendo uso de Excel. Una vez terminada la actividad se les preguntó por qué hicieron los cálculos usando Excel, contestando, que era más fácil y más seguro hacerlo así, hay que destacar que todos lograron identificar las tablas que contenían valores de una función cuadrática empleando el método de las primeras y segundas diferencias.

Como podemos notar en esta actividad el alumno ha utilizado un procedimiento similar al método de las diferencias divididas interpolantes de Newton, el cual es empleado en cursos de análisis numérico; aunque para no saturar en alguna medida al alumno hasta el momento no se ha logrado desarrollar el cambio de esta representación a otra, nuestro objetivo se enmarcó en la identificación de una función cuadrática en su representación tabular, actividad necesaria para el paso de ésta a su representación algebraica. La mayor dificultad observada fue el uso de las fórmulas en Excel y en alguna medida la redacción de su pensamiento.

4.2.3. Actividad No. 3

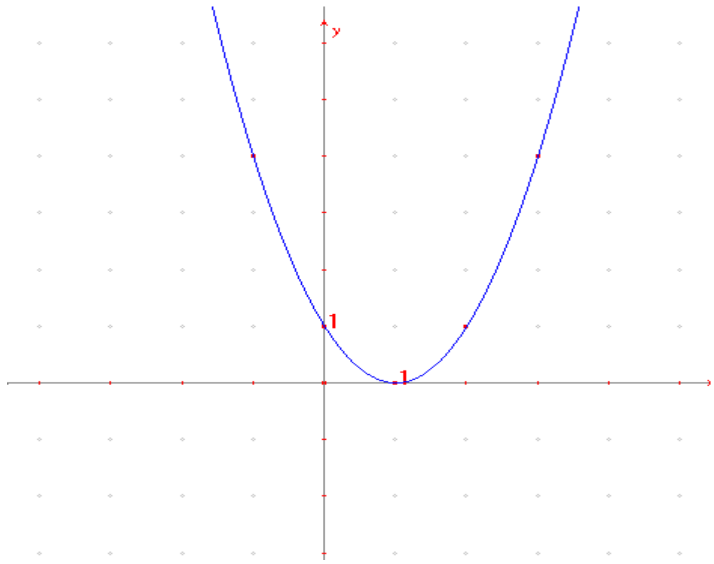
El objetivo de esta actividad era determinar la representación tabular y gráfica de una función cuadrática dada su representación algebraica. Para el logro de este objetivo se proporcionó a los alumnos una guía de trabajo donde se planteaba la ecuación $y = x^2 - 2x + 1$, la que debían representar en la siguiente tabla:

x	y
-1	
0	
1	
2	
3	

Ante la dificultad mostrada por los alumnos en el uso de fórmulas matemáticas en Excel en la actividad 2, específicamente cuando se trataba de encontrar el valor de **y** dada la representación algebraica de una función cuadrática, se optó por el uso de lápiz y papel para calcular estos valores, pasando seis alumnos al pizarrón donde cada uno encontró un valor de la tabla, todos hicieron correctamente los cálculos sin mostrar algún tipo de problema. Se consideraron valores enteros para x entre -1 y 3 por la ubicación de los puntos en el sistema de coordenadas rectangulares usando el software Cabri-géometre II, el uso de números decimales implicaba mayor cantidad de procedimientos y no era éste el objetivo.

Habiendo completado la tabla, se pedía que ubicaran en el plano cartesiano cada uno de los puntos obtenidos y con la opción "**cónica**" de Cabri, marcando los puntos ubicados en el plano, el 90% obtuvo la siguiente figura:

Figura No. 12



Gráfica de $f(x)=x^2-2x+1$ usando Cabri

A la pregunta, ¿Qué forma tiene la figura obtenida?, el 100% contestó que era una parábola, esto es una evidencia que la primera actividad fue fundamental para adquirir tal conocimiento. Identificar la figura que se obtiene de la representación algebraica de una función cuadrática es básico para poder pasar de la ecuación a la gráfica y viceversa.

Con el fin de reforzar el concepto de dominio y rango de una función en la guía de trabajo se planteaban las siguientes preguntas, ¿Cuál es el dominio de la función?, ¿Cuál es el rango de la función?, aquí se observó que Dasly cuando contesta la primera pregunta, inicialmente dice, "son todos los ejes en x", mostrando dificultad en expresar sus ideas, luego dice que los valores serían 1 y 4 señalando estos números en el eje y, sin embargo al mencionar el rango lo hace de manera correcta pero con inseguridad dice, "*creo que desde cero hasta el infinito positivo*", es probable que a la primera interrogante haya querido decir que eran todos los valores de x donde está definida la función, evidentemente no tiene claro el concepto de dominio y rango de una función ya que al mencionar el rango, mientras lo hacía, con el puntero del mouse señalaba el eje **x**, en su visualización no logra percibir los valores señalados.

Se menciona la experiencia anterior con el objeto de mostrar que los conceptos deben ir siendo aclarado para su mayor comprensión durante todo el proceso de enseñanza aprendizaje, como veremos más adelante los logros alcanzados por ella fueron muy significativos.

Al mencionar el rango de la función Maylin y Evelin asocian éste con los valores de y, si observamos la figura anterior se puede ver que el punto de intersección de la parábola con el eje **y** es el punto (0,1), razón por la que ellas visualizan el rango únicamente a partir del punto de intersección de la parábola con el eje **y**, concluyen que, el rango "va del uno a todos los positivos", en el momento no lograron visualizar el rango completo no consideraron el intervalo (0, 1 [.

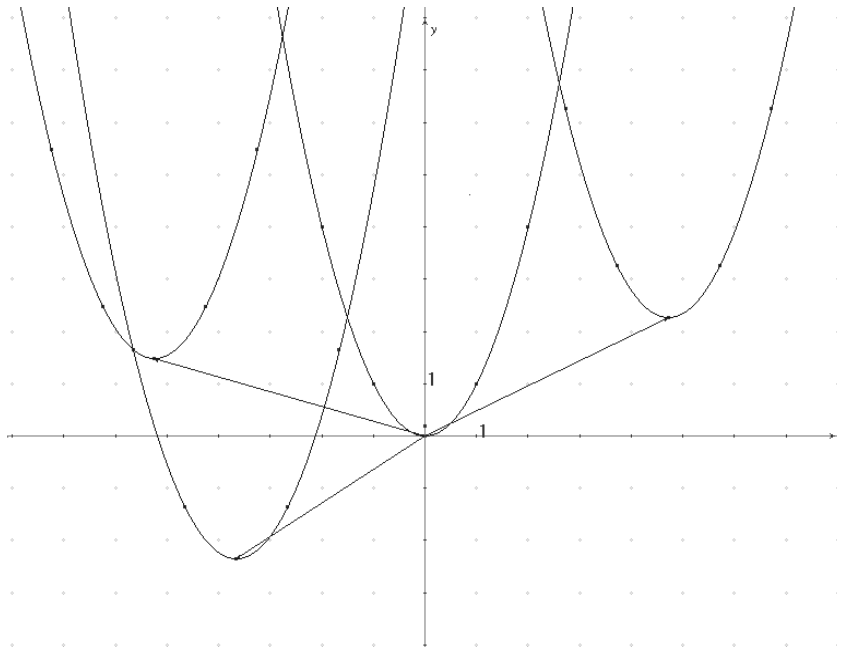
En un segundo ejercicio de la guía de trabajo se pedía lo siguiente
Dada la función $y = x^2$, complete la siguiente tabla determinando los valores de **y** para cada uno de los valores de **x**.

x	Y
-2	
-1	
0	
1	
2	

En una nueva hoja del software Cabri-géomètre II, represente gráficamente la función siguiendo los pasos del ejercicio 1 y luego conteste las siguientes preguntas: ¿Qué forma tiene la figura obtenida?, ¿cuál es el dominio de la función?, ¿cuál es el rango de la función?.

Con estas instrucciones los alumnos determinaron el valor numérico de la función y ubicaron los puntos en el plano, una vez ubicados los puntos correctamente, con la opción cónica obtienen la figura correspondiente a una parábola. Usando la opción "vector" se pedía que dibujaran vectores en distintas direcciones con su punto inicial en el origen y con la opción "**traslación**" trasladar la parábola de $y = x^2$ respecto a cada uno de los vectores, obteniendo figuras como la siguiente.

Figura No. 13

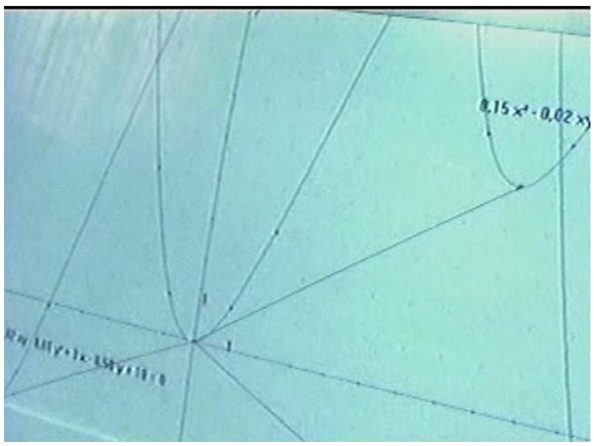


Gráfica de la función $f(x)=x^2$ y diferentes traslaciones de la misma en Cabri

El propósito de esta actividad era que el estudiante logrará descubrir que la representación algebraica correspondiente a cada una de las gráficas obtenidas es una ecuación de la forma $y = ax^2 + bx + c$.

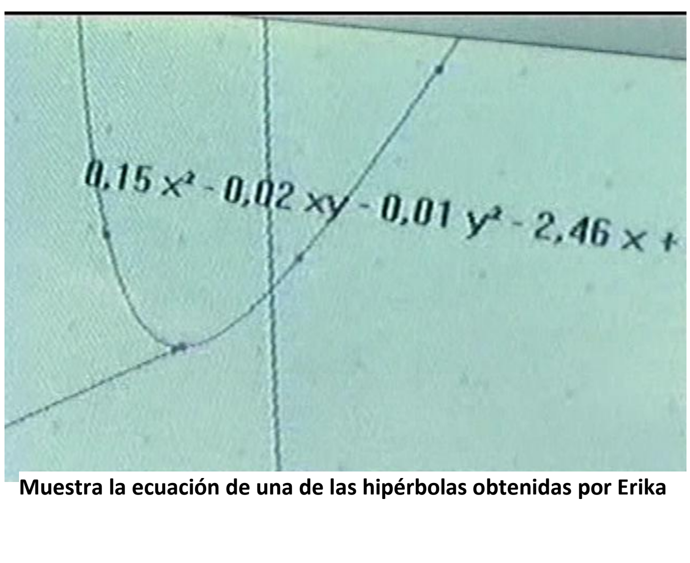
En este ejercicio únicamente Erika tuvo dificultades, al ubicar el punto (2, 4) terminó ubicando (2,3) la figura obtenida fue una hipérbola, sin duda alguna que una de las limitaciones en el uso de la computadora es el tamaño de la pantalla. De la hipérbola únicamente se lograba apreciar la parte que abría hacia arriba, dando la impresión de visualizar una parábola por lo que sin vacilación alguna, dice, "*es una parábola*" y su representación algebraica es una función cuadrática; únicamente considera el grado de la variable **x**, que es 2, sin apreciar que el grado con respecto a **y** también era 2, debemos señalar que hay que tener precaución con el uso de los dispositivo gráfico ya que se puede percibir un objeto matemático como algo que en realidad no lo es, por la falta de una visualización amplia del objeto que permita observar mayor cantidad de elementos, las imágenes que tenía se muestran a continuación, como se observa en la primera figura a simple vista parece tener parábolas, sin embargo al realizar un acercamiento como se ve en la segunda figura la ecuación corresponde a una hipérbola.

Figura No. 14



Gráficas correspondientes a hipérbolas obtenidas por Erika, en lugar de parábolas

Figura No. 15



Muestra la ecuación de una de las hipérbolas obtenidas por Erika

El 90% de los alumnos realizó con éxito este ejercicio, primero lograron ubicar correctamente los puntos e identificaron que la figura obtenida era una parábola, al trasladar ésta con respecto a los vectores dibujados de igual forma lograron identificar que cada una de las figuras obtenida también era una parábola.

Para lograr que el estudiante descubriera que la ecuación correspondiente a una parábola es de la forma $y = ax^2 + bx + c$, en la actividad se pedía usar la herramienta "**ecuación y coordenadas**" para desplegar la ecuación de cada una de las gráficas identificando el grado a través de las preguntas: ¿cuál es el mayor exponente de la variable **x**?, ¿cuál es el mayor exponente de la variable **y**?, obteniendo éxito en un 100% ya que al plantear en esta misma actividad una lista de ecuaciones de las que debían marcar aquellas cuya gráfica es una parábola, éstas fueron marcadas correctamente. Además, a la pregunta ¿qué forma tiene la representación gráfica de una función cuya representación algebraica es de la forma $y = ax^2 + bx + c$?, todos contestan que es una parábola. En el caso de Erika que había obtenido inicialmente una hipérbola se hizo la corrección para lograr también con ella nuestro objetivo.

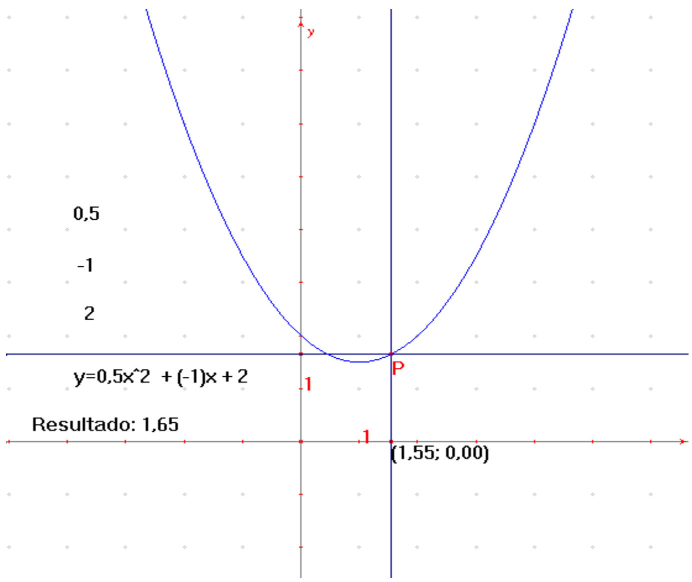
Como podemos observar, mediante esta actividad no hubo necesidad en plantear de entrada la ecuación de la función cuadrática y decir que su gráfica es una parábola, sino que el alumno después de observar las diferentes figuras y su respectiva ecuación descubre que cada una de ellas está representada por una ecuación de grado dos, de esta manera cuando se enfrente a figuras semejantes podrá asociarla con este tipo de ecuaciones.

4.2.4. Actividad No. 4

El objetivo de la actividad era, construir el lugar geométrico de una función cuya representación algebraica está dada por la ecuación $y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$, y observar cómo afecta a la gráfica el cambio de valor del parámetro c. Tal como señala el NTCM (2003, p. 303), "Los alumnos de secundaria deberían tener experiencias interesantes explorando las propiedades de diferentes tipos de funciones". En tal sentido plantean que éstos, “tendrían que aprender a reconocer cómo afectan los cambios en los valores de los parámetros a las gráficas de la funciones de una misma familia”, medio para comprender mejor las clases de funciones.

Como experiencia adicional para el alumno, la guía de trabajo que se les proporcionó describía cada uno de los pasos necesarios para la construcción del lugar geométrico de la función $y = 0.5x^2 - x + 2$, luego para mejorar la apariencia de la figura se empleó la opción “**cónica**” de Cabri, obteniendo la siguiente figura.

Figura No. 16



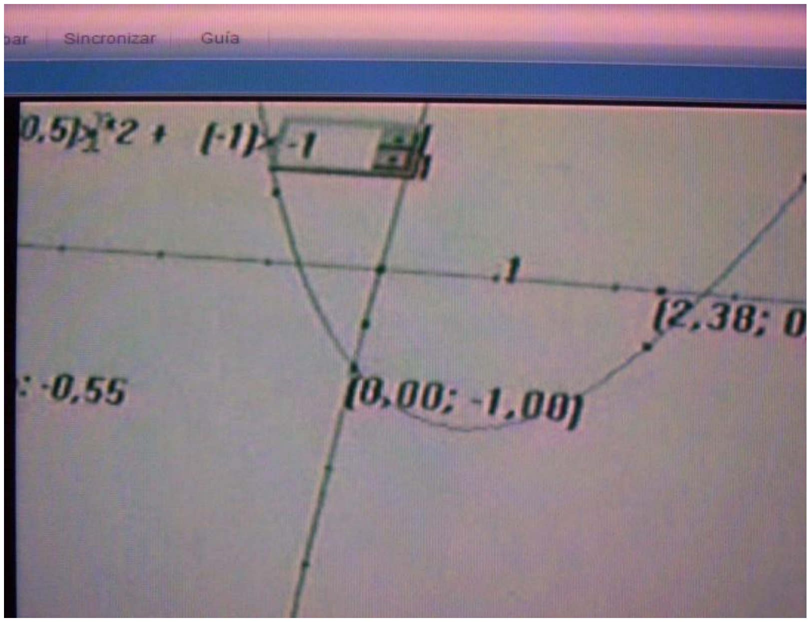
Gráfica de la función $y = 0.5x^2$-x+2 en Cabri

En la construcción, dos de los alumnos mostraron cierto grado de dificultad teniendo que repetir el procedimiento desde el principio hasta lograr el objetivo, una vez obtenida la figura ninguno mostro dificultad en identificarla, mencionando que se trataba de una parábola, nuevamente se muestra evidencia que las actividades anteriores fortalecieron el reconocimiento de ésta.

A la interrogante, ¿Cuál es el punto de intersección de la parábola con el eje y?, el 100% de los estudiantes lograron identificar el punto, aunque inicialmente mencionaban sólo el valor de la ordenada, contestaban, el punto de intersección es 2, se hizo la aclaración de que todo punto en el plano cartesiano está formado por un par ordenado por lo que se les preguntó sobre el valor de la abscisa, mencionando sin ninguna dificultad que éste era cero, se puede deducir que cuando se tiene un punto sobre uno de los ejes, el alumno, visualiza éstos como dos rectas aisladas de números reales, no ven el plano como un todo, considerando únicamente la coordenada correspondiente al punto de la recta real.

En esta actividad, en el comentario que contenía la ecuación $y = 0.5x^2 - x + 2$, el alumno mediante el control numérico que proporciona el programa Cabri puede cambiar el valor de cada uno de los parámetros, así, se les pide que cambien el valor del parámetro *c*, que observen la gráfica obtenida e identifiquen las coordenadas del punto de intersección de la parábola con el eje **y**, a través de la visualización identifican las coordenadas del punto correctamente, aunque en ocasiones mencionan sólo el valor de la ordenada. Sobre el cambio de este parámetro el NTCM(2003, p. 303), señala que, teniendo acceso a sistemas de computación algebraica, “Las consecuencias de cambiar los parámetros *a* y *c* son relativamente fáciles de observar”, lo cual quedo demostrado ya que ninguno tuvo problema con sus apreciaciones, a continuación se muestra una imagen cuando uno de los estudiantes cambiaba parámetro *c*.

Figura No. 17



Cambio del parámetro c **de una función cuadrática en Cabri**

Con esta actividad el alumno en poco tiempo logró descubrir que el valor del parámetro **c**, da el punto de intersección de la parábola con el eje **y**, esto mediante el uso tradicional de lápiz y papel requiere mayor tiempo y es el docente quien proporciona este conocimiento, obstaculizando la comprensión al no permitir que sea el alumno que lo descubra. Además se realiza un número muy limitado de ejercicios como para darse cuenta del efecto que produce el valor del parámetro **c** en la gráfica de la función, dando pie a que tal conocimiento perdure poco tiempo en el estudiante quienes al final de cuenta ni siquiera recuerdan haber visto ese contenido. El NCTM (2003, p. 26) señala que, “Mediante calculadoras y ordenadores los estudiantes pueden examinar más representaciones o ejemplos que los que son posibles a mano, y así, pueden formular y explorar conjeturas fácilmente”, como se demostró en esta actividad.

Una de las limitaciones en el uso de la computadora como se había mencionado anterior es el tamaño de la pantalla, sin embargo para valores muy grandes el alumno, sin necesidad de ver la gráfica después de haber realizado una serie de ejercicios contesta correctamente cuáles son las coordenadas del punto de intersección al cambiar el valor del parámetro **c**.

Una vez realizada la actividad anterior, se le presenta una serie de funciones cuadráticas en su representación algebraica y sin tener que recurrir a su representación gráfica el 100% de los estudiantes escriben en su hoja de trabajo correctamente en cada uno de los ejercicios las coordenadas del punto de intersección de ésta con el eje **y**, la siguiente figura contiene el ejercicio desarrollado por Owen.

Figura No. 18

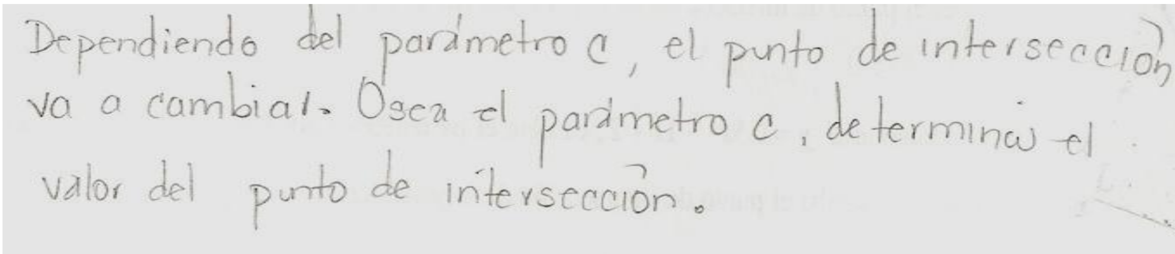
8. En cada una de las siguientes funciones determine el punto de intersección de la gráfica con el eje y, sin el uso de la computadora.

Función	Punto de intersección con el eje y
$y=-2x^2+5x-3$	(0,-3)
$y=3x^2-7x+5$	(0,5)
$y=-5x^2+2x+7$	(0,7)
$y=-2x^2+7x-2$	(0,-2)
$y=x^2+5x+6$	(0,6)
$y=-5x^2+4x-8$	(0,-8)
$y=ax^2+bx+c$	(0 c)

Ejercicio desarrollado por Owen sobre puntos de intersección de la parábola con el eje y

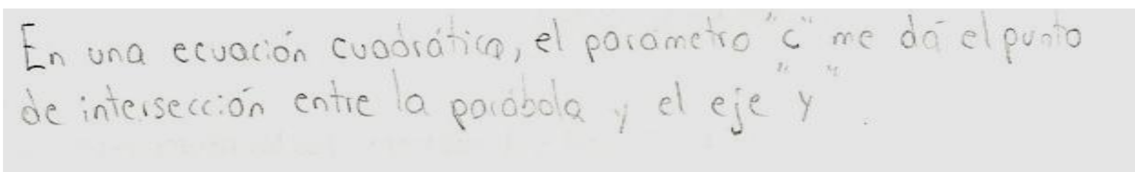
A continuación se presenta la conclusión dada por Belkis y Evelyn respectivamente, sobre el efecto que produce el parámetro **c** en una función cuadrática.

Figura No. 19


Dependiendo del parámetro c, el punto de intersección va a cambiar. Osea el parámetro c, determina el valor del punto de intersección.

Conclusión de Belkis sobre efecto del parámetro c en la gráfica de una función cuadrática

Figura No. 20


En una ecuación cuadrática, el parametro "c" me dá el punto de intersección entre la parábola y el eje "y".

Conclusión de Evelyn sobre efecto del parámetro c en la gráfica de una función cuadrática

Aunque con diferentes palabras, dada la dificultad que tienen para expresar la idea principal, todos llegan a la conclusión que el valor del parámetro **c** en la ecuación de una función cuadrática da el punto de intersección de su gráfica con el eje **y**, en la conclusión de Belkis, se observa que ella no menciona con cuál de los ejes es la intersección a la que se refiere, esto no significa que no haya comprendido tal significado sino que dado que la actividad únicamente comprendía el punto de intersección en el eje **y**, da por sobre entendido que se trata de éste y no del eje **x**, únicamente dos alumnos escribieron en su conclusión que se trataba del punto de intersección de la gráfica con el eje **y**, tal como se observó en la figura anterior de la conclusión dada por Evelyn.

4.2.5. Actividad No. 5

El objetivo de la actividad era encontrar las coordenadas del vértice y la ecuación correspondiente al eje de simetría de una parábola dada su representación algebraica. Para ellos se pidió a los alumnos que hicieran uso del archivo que contenía la construcción de la parábola realizada en la actividad 4, en la que se mostraba la siguiente figura.

Figura No. 21

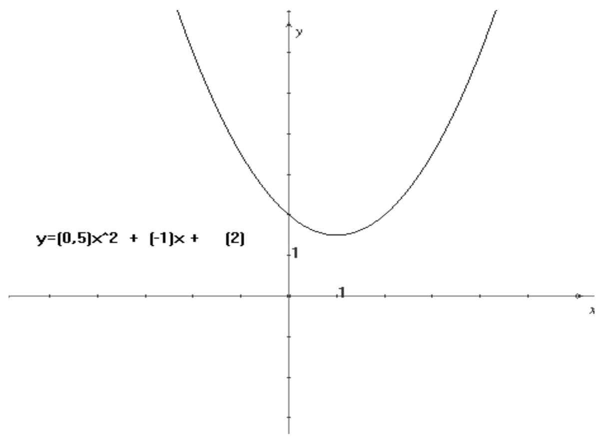


Figura para determinar el vértice de la parábola

En la ecuación que se muestra podían cambiar el valor de cada uno de los parámetros, se le pidió que cambiaran el parámetro **a** con valores reales positivos y negativos distintos de cero que se daban en una tabla en la que debían escribir en la segunda columna si la parábola era cóncava hacia arriba o hacia abajo y en la tercera columna si su vértice era un punto máximo o mínimo, como se muestra en la actividad desarrollada por Yanitza.

Figura No. 22

a	*Concavidad*	*Punto máximo o mínimo*
2	hacia arriba	Punto minimo
-3	hacia abajo	Punto maximo
5	hacia arriba	Punto minimo
-2.5	hacia abajo	Punto maximo
3.5	hacia arriba	Punto minimo
-8	hacia abajo	maximo
-9	hacia abajo	maximo
3	hacia arriba	minimo

Ejercicio resuelto por Yanitza sobre concavidad, punto máximo y mínimo

En esta actividad el 100% de los alumnos completaron la tabla correctamente, sin mostrar ningún tipo de dificultad, por la facilidad con la que se puede cambiar el parámetro, los estudiantes pueden realizar varios cambios en poco tiempo y sin mayor esfuerzo, logrando así descubrir por su cuenta, el efecto que produce el valor del parámetro **a** de la ecuación de la función cuadrática en la gráfica, esto, tradicionalmente con el uso de papel y lápiz lleva mucho tiempo y esfuerzo para lograr visualizar y comprender que si éste valor es negativo la concavidad de la parábola es hacia abajo, si es positivo la concavidad es hacia arriba, el NCTM(2003, p.28) establece que "el estudio del Álgebra necesita no limitarse sólo a las situaciones en las que la manipulación simbólica es relativamente directa. Utilizando la tecnología, los alumnos pueden razonar sobre cuestiones más generales, como cambios en los parámetros, por ejemplo y pueden modelizar y resolver problemas hasta ahora inasequibles para ellos". A continuación mostramos la conclusión a la que llegó Evelyn.

Figura No. 23

2. ¿Qué relación tiene el parámetro *a* con respecto a la concavidad de la gráfica de una función cuadrática?

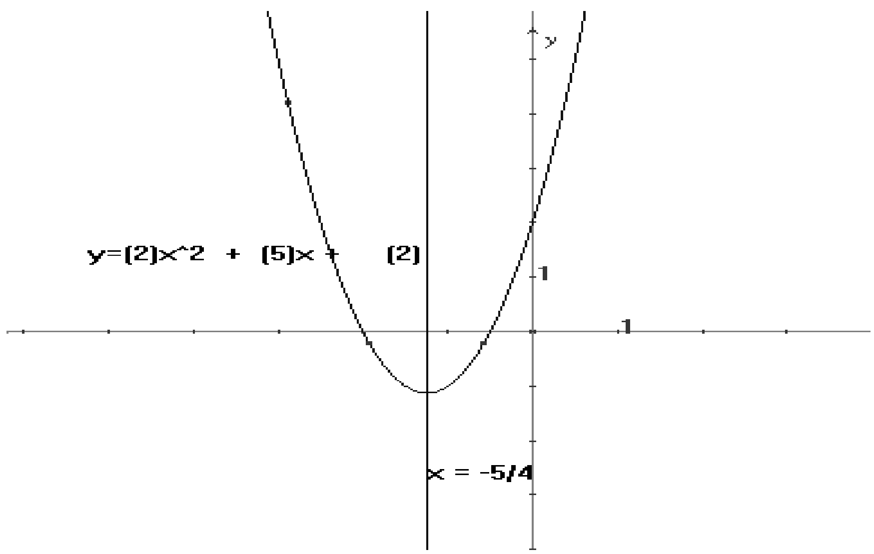
Cuando el parámetro a es positivo la concavidad de la gráfica sera hacia arriba y tendrá un punto mínimo.

Conclusión de Evelyn sobre el efecto que produce el parámetro a en la gráfica de la función cuadrática

Evelyn mostró ser una de las alumnas más destacadas en este grupo. En su conclusión no considera el caso cuando el parámetro **a** es negativo, se puede presumir que da por hecho que aquí ocurre lo contrario, es decir, que la concavidad será hacia abajo y que el vértice es un punto máximo, además cuando se le preguntó en forma oral sobre las concavidad y el punto máximo contestó correctamente y con mucha seguridad sobre cada uno de los casos.

Para determinar la ecuación del eje de simetría y las coordenadas del vértice de la parábola en la guía de trabajo se les dieron los pasos para la construcción de la recta correspondiente al eje de simetría y que usaran la herramienta "ecuación y coordenadas" de Cabri, obteniendo una figura como la siguiente.

Figura No. 24



Muestra la ecuación del eje de simetría

Como se puede observar en la ecuación del eje de simetría, ésta, aparece como fracción, se pidió que cambiaran los valores correspondientes a los parámetros **a** y **b** dados en una tabla que debían completar escribiendo el eje de simetría, el valor de la abscisa en el vértice y el valor de la ordenada para cada uno de los casos, para determinar el eje de simetría no se observó ningún tipo de dificultad ya que esta se visualiza en pantalla. Al considerar que el eje de simetría pasaba por el vértice, además que el valor de **x** en esta recta es constante, logran identificar que en el vértice, éste es el valor de la abscisa y sustituyendo la variable **x** por este valor encuentran la ordenada, la siguiente es la tabla del ejercicio completada por Maylin, quien tenía como valor del parámetro c = -6.

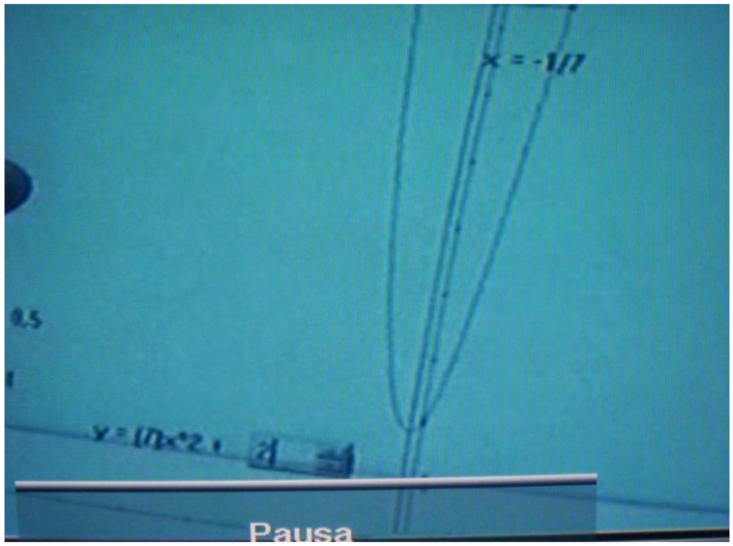
Figura No. 24

a	*b*	*Eje de simetría*	*Valor de la abscisa en el vértice*	*Valor de la ordenada en el vértice*
1	3	X = -3/2	-3/2	-8,25
2	3	X = -3/4	-3/4	-7,13
7	-2	X = 1/7	1/7	-6,14
-5	1	X = 1/10	1/10	-5,95
2	5	X = -5/4	-5/4	0
-3	-1	X = 1/6	1/6	-5,92
5	2	X = -1/5	-1/5	-6,20

Actividad desarrollada por Maylin

Al escribir la ecuación general para determinar el eje de simetría de la parábola observamos dificultad en identificar que el numerador era el opuesto del parámetro **b** y el denominador el doble del parámetro **a,** cuando la fracción es reducible ya que en Cabrí, ésta se muestra simplificada, esto representa una dificultad ya que el proceso de simplificación permanece oculto, únicamente cuando la fracción obtenida era irreductible lograban visualizar correctamente la ecuación lo que creó mucha confusión en ellos, el problema radica posiblemente en las bases aritméticas con las que cuentan, la siguiente figura muestra uno de esos casos, donde el valor del parámetro **a** era 7 y el de **c** era 2, obsérvese que el eje de simetría queda como x=-1/7, para ellos esto era distinto a su valor obtenido -2/14.

Figura No. 25



Dasly encontrando el eje de simetría

Como el objetivo era que descubrieran la ecuación del eje de simetría, al observar que no lograban identificarla cuando esta se podía simplificar se les propuso valores como 3 y 5 para los parámetros **a** y **b** respectivamente en los que los valores obtenidos en el numerador y denominador eran primos entre sí, hasta lograr que llegaran a tal descubrimiento, aclarando posteriormente que si la fracción es reducible se debía simplificar. Debemos señalar que únicamente el 20% completó la actividad debido a que mostraron cansancio y frustración por no lograr obtener el resultado de inmediato como en las actividades anteriores, la parte que el 80% no completo fue la columna correspondiente al valor de la ordenada en el vértice, aunque tenían claro que para esto debían sustituir en la ecuación el valor de **x** obtenido en la columna correspondiente a la abscisa.

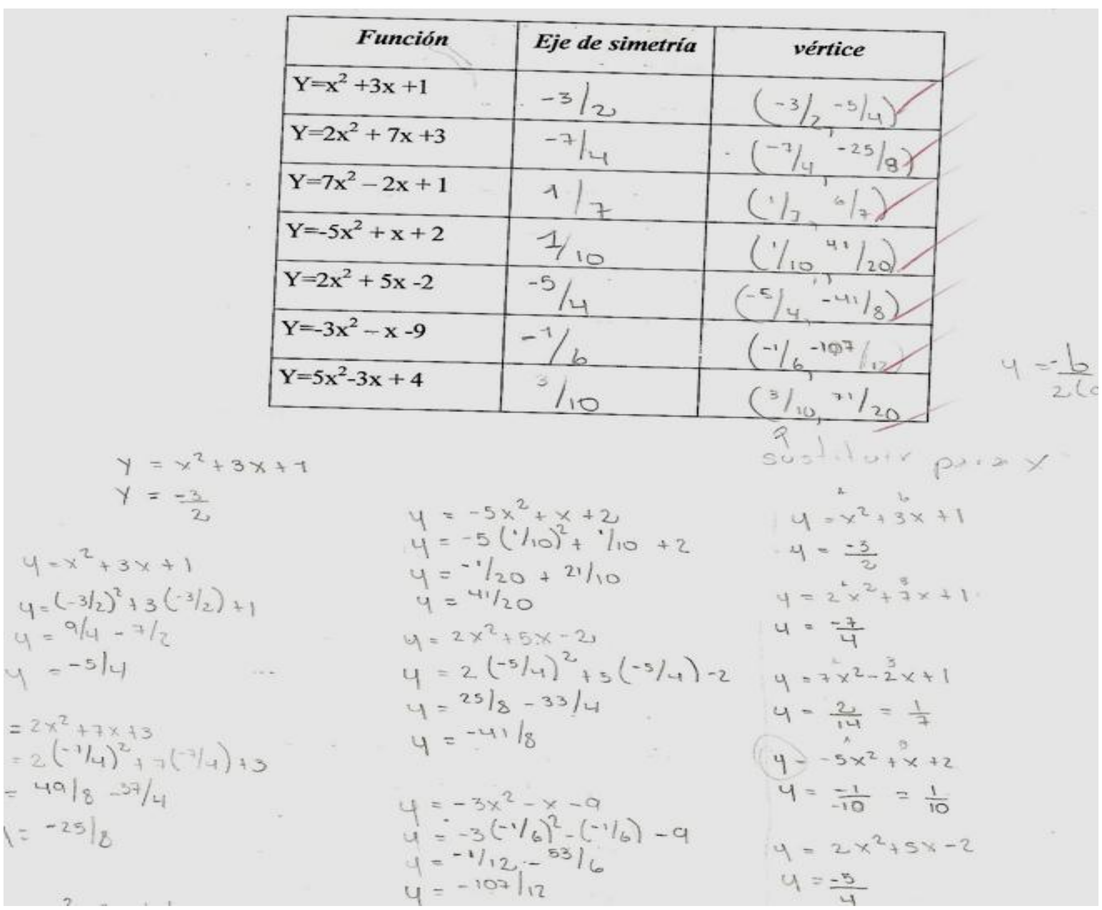
Otra de las observaciones realizada en esta actividad fue la dificultad en la lectura y escritura de expresiones algebraicas ya que por decir que el denominador era el doble del parámetro **a**, decían que era el cuadrado, pero al escribir la expresión lo hacían como el doble de éste, por lo que siempre es recomendable hacer que el alumno escriba en términos matemáticos lo que expresa y viceversa, según Sierpinska, 1992; Jungk, 1997 [citado por

Dolores (1998, p. 259)], coinciden que algunos elementos indicativos de la compresión de los conceptos matemáticos pueden ser:

- Conocer y utilizar correctamente la simbología con que se le representa al concepto.
- Interpretar correctamente los símbolos utilizados en la definición del concepto.

Bebido a que la actividad no se realizó por completo en el desarrollo de la actividad, en una sesión posterior se aplicó un nuevo instrumento donde el alumno debía encontrar el eje de simetría y el vértice de una función cuadrática dada su representación algebraica, a continuación se muestra parte del trabajo desarrollado por Dasly, como se puede observar en la siguiente figura, ella obtiene correctamente todos los valores que se piden en la tabla.

Figura No. 26



Función	*Eje de simetría*	*vértice*
$Y=x^2+3x+1$	$-3/2$	$(-3/2, -5/4)$
$Y=2x^2+7x+3$	$-7/4$	$(-7/4, -25/8)$
$Y=7x^2-2x+1$	$1/7$	$(1/7, 6/7)$
$Y=-5x^2+x+2$	$1/10$	$(1/10, 41/20)$
$Y=2x^2+5x-2$	$-5/4$	$(-5/4, -41/8)$
$Y=-3x^2-x-9$	$-1/6$	$(-1/6, -107/12)$
$Y=5x^2-3x+4$	$3/10$	$(3/10, 71/20)$

Procedimiento usado por Dasly encontrando eje de simetría y vértice

En esta actividad se observó que los estudiantes tienen dificultades al trabajar con números fraccionarios, entre estas podemos mencionar la carencia de habilidades para identificar fracciones equivalentes, no demuestran destrezas en la simplificación de fracciones así como en la realización de operaciones básicas con fracciones, la mayor dificultad observada fue la identificación de fracciones equivalentes, sin embargó se logró que el estudiante visualizara el efecto que produce en la gráfica el valor del parámetro **a** cuando es negativo o positivo. Además se logró que obtuvieran la ecuación correspondiente al eje de simetría y crear un procedimiento para el cálculo de las coordenadas del vértice de la parábola, actividad necesaria para lograr el paso de la representación algebraica al gráfico de una función cuadrática.

4.2.6. Actividad No. 6

El objetivo de la actividad era determinar los puntos de intersección de la gráfica de una función cuadrática con el eje **x** dada su representación algebraica. Para esta actividad se dio una guía de trabajo que debían desarrollar haciendo uso del programa de computación Grapes.

Inicialmente se pidió que graficaran la función cuya ecuación era $y=x^2+3x-1$, como se puede observar, en esta función tenemos que los puntos de intersección de la gráfica correspondiente con el eje **x** son números irracionales. La siguiente figura corresponde a la gráfica de la función.

Figura No. 27

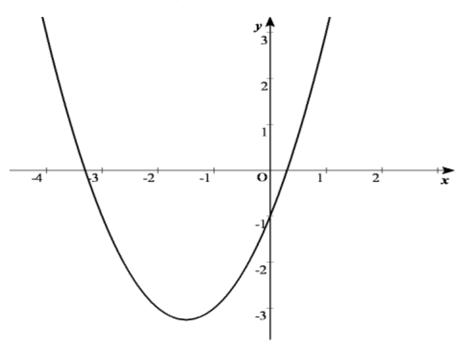


Figura 29, gráfica de la función y=x²+3x-1

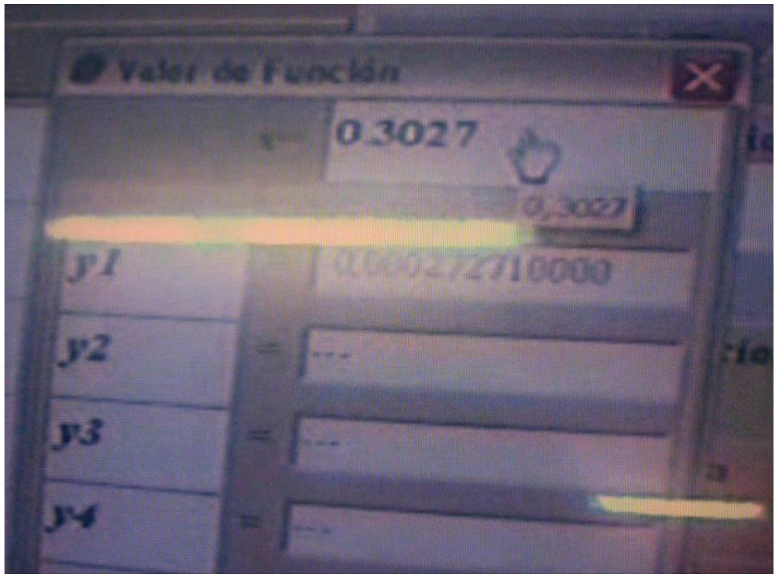
Una vez obtenida la gráfica debían observar los puntos de intersección y haciendo uso de la herramienta "**mostrar valores de la función**" del programa Grapes, se pidió que escribieran el valor que creían que correspondía a la abscisa en esos puntos, el punto de intersección que se consideró es el que se muestra a la derecha de la gráfica, el 80% inicia con 0.3 y un 20% inician con 1. De éstos el 40% aseguran que éste es el valor más cercano. Se observó una gran dificultad en determinar un número decimal que esté entre dos números decimales cuya diferencia entre ellos es una décima llegando a decir en algunos casos que no existían números que estén por ejemplo entre 0.2 y 0.3, nuevamente se puede decir que el problema radica posiblemente en las bases aritméticas con las que cuentan, y es que tradicionalmente cuando se trata de encontrar el valor numérico de una función, parece ser una norma general el uso únicamente de números enteros.

Después de probar con 0.2, llegan a la conclusión que este no es el valor de **x** en el punto de intersección ya que el valor que se muestra para **y** era -0.01 y no cero, eso muestra que en el gráfico logran visualizar claramente que en los puntos de intersección de la gráfica con el eje **y** el valor de la ordenada debe ser cero.

Un acontecimiento que vale la pena destacar en esta actividad es el realizado por Evelyn quien por descubrimiento propio empleó de manera empírica El **Teorema de Bolzano** que afirma lo siguiente, si una función es continua en un intervalo cerrado y acotado y en los extremos del mismo ésta toma valores con signos opuestos, entonces existe al menos una raíz de la función en el interior del intervalo. De esta forma al introducir un valor de **x** donde el valor obtenido para **y** era negativo, el siguiente valor que introducía para **x** en la computadora era mayor que el anterior y en el caso donde el valor de **y** era positivo el siguiente valor introducido para **x** era menor que el anterior, haciendo esto de manera reiterada logra obtener una muy buena aproximación, sin embargo al ser las raíces de la función números irracionales debía buscar un procedimiento alterno para obtener el valor exacto, la siguiente figura muestra una de la aproximaciones obtenidas por ella.

Al resolver la ecuación $0 = x^2 + 3x - 1$, una de las raíces reales obtenidas es $x = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$, cuya aproximación con seis dígitos decimales es 0.302776.

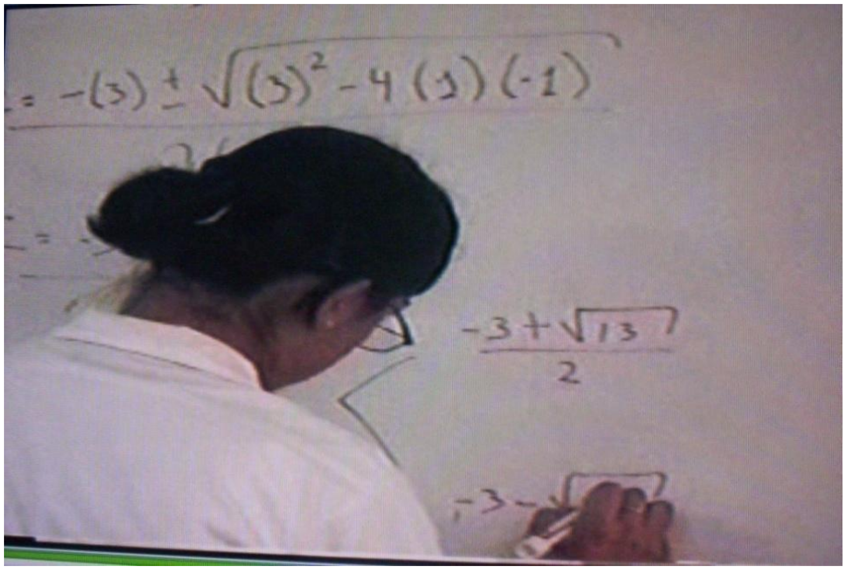
Figura No. 28



Aproximación del valor de x, en el punto de intersección de gráfica de $y=x^2+3x-1$ con el eje x encontrado por Evelyn.

La visualización de la gráfica de una función cuadrática no nos permite en casos como este poder determinar las coordenadas de los puntos de intersección de la misma con el eje **x** por lo que después de muchos intentos realizados por ellos se tuvo que intervenir preguntándoles de que manera podían resolver la ecuación obtenida al sustituir el valor de la ordenada por cero, dándose cuenta que lo que tenían era una ecuación cuadrática en una variable la que resolvieron empleando la fórmula general, aquí no mostraron ninguna dificultad en la solución, al observar el valor obtenido mencionan “con razón no podíamos obtener el valor exacto”, la siguiente figura muestra la solución encontrada por Evelyn.

Figura No. 29



Evelyn encontrando los valores de x, en los puntos de intersección de $y=x^2+3x-1$ con el eje x.

Si bien es cierto que con el uso de este software no pudieron determinar el valor exacto, teniendo que recurrir al uso tradicional de lápiz y papel, también es cierto que el uso del software le permite ir más allá del simple hecho de la aplicación de una fórmula tal es el caso de Evelyn que aplicó un método que seguramente llevó mucho tiempo para los grandes matemáticos descubrirlo como ser el teorema de Bolzano que está íntimamente relacionado con los teoremas de Rolle y del valor medio.

4.2.7. **Actividad No.** 7

El objetivo de esta actividad era determinar en qué parte la parábola es creciente y donde es decreciente. Además que sirva al estudiante a obtener una mayor claridad en la resolución de problemas para visualizar los puntos máximos o mínimos de la función cuadrática.

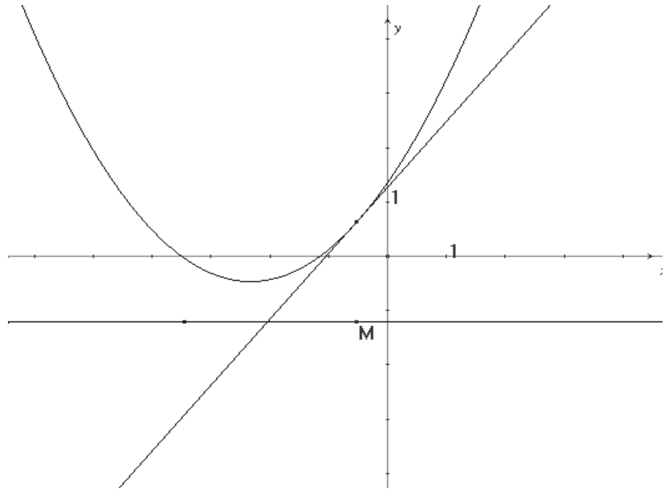
En esta actividad se pidió a los estudiantes la construcción de una parábola en la que quedaba una recta tangente en uno de sus puntos con la posibilidad de poder mover dicha recta de tal forma que al cambiar el punto de intersección éste siguiera la trayectoria de la parábola.

Maylin tiene claro el concepto de crecimiento y decrecimiento de la gráfica de una función lineal así como también si la recta tiene pendiente positiva o negativa, cuando se pregunta sobre la pendiente de la recta tangente pregunta “¿qué es una tangente?”, al aclararle su duda comenta que: “creciente es cuando disminuye en una y aumenta en otra” refiriéndose al cambio de x y y.

Al preguntársele a Ericka en qué partes es creciente la parábola, contesta, “cuando la movemos para el lado de las x positivas”, mueve la recta con rotación en contra de la manecillas del reloj y dice “si muevo la recta hacia los valores positivos de x la parábola es creciente”; (mientras comenta señala la recta como haciendo referencia a su inclinación). Considera que en los puntos donde la parábola tiene una recta tangente creciente, en esos puntos también la parábola es creciente, es probable que esto lo haya asociado más con la pendiente de la recta que con la comparación de los valores correspondientes a **x** en los puntos de la parábola ya que en ningún momento se refiere a esta comparación cuando mueve la recta sobre la parábola.

Además como podemos observar en la siguiente figura la cual era similar a la que se mostraba en la pantalla de su computadora a la derecha de su vértice también existen valores negativos para **x** y en su apreciación esta clara que a la derecha de su vértice la parábola es creciente, ¿por qué menciona únicamente valores positivos para **x**?, la posible razón es que el movimiento de la recta se lograba con el cambio de posición del punto M a través de la recta que lo contiene, asociando de esta manera el movimiento del punto hacia la derecha con la ubicación de los números reales en la recta numérica donde se menciona que los positivos están a la derecha de cero.

Figura No. 30



Gráfica para determinar crecimiento y decrecimiento de la función

Al preguntarle a Dasly, ¿en qué parte es creciente la parábola?, mueve la recta tangente de modo que su pendiente es positiva y contesta "allí es creciente la parábola, allí todavía es creciente, pero ya cuando se mira de que…", por un momento se detiene luego prosigue diciendo, "acá está paralela y ya cuando se mira que se mueve a la izquierda va siendo decreciente", al decir que está paralela se refiere a la recta tangente con el eje **x**, la figura que tenía en pantalla era la siguiente:

Figura No. 31

Gráfica de Dasly para determinar crecimiento y decrecimiento de una función cuadrática

De inmediato se le preguntó, ¿a partir de qué punto?, y contesta, “uuuun a partir del tres, del negativo tres punto cero dos y el cero punto diez y siete”, ¿está segura?, ella contestó, “a partir del punto F por que va recto”. Hay que recordar que en la actividad 5 se trazó la recta correspondiente al eje de simetría, por lo que podemos decir que ella está considerando que ésta recta separa la parte donde la gráfica es creciente, con la parte donde es decreciente, finalmente llega a la conclusión que el cambio ocurre a partir del vértice.

Con la descripción anterior podemos observar que los estudiantes logran asociar que, en los puntos donde la pendiente de la recta tangente a la gráfica es positiva, ésta es creciente y donde es negativa la gráfica es decreciente, asociando esto con conocimientos previos como ser los significados de la función lineal. Ballester (2002, p. 17), nos cita a Ausubel, Novak, Hanesian, quienes explican que: “la esencia del aprendizaje significativo reside en el hecho de que las ideas están relacionadas simbólicamente y de manera no arbitraria (no al pie de la letra) con lo que el alumnado ya sabe”. Así que una de las ideas claves del aprendizaje significativo es relacionar las ideas previas del alumnado con la información nueva de manera estructurada y coherente, así pues para enseñar es necesario conocer al alumnado que tenemos por delante es decir, conocer qué sabe sobre un tema antes de empezar a trabajarlo. Por lo planteado anteriormente se puede deducir que con el desarrollo de esta actividad en cursos superiores como el cálculo, el alumno logrará aplicar sin dificultad el concepto de derivada para graficar funciones y determinar los puntos de inflexión de una gráfica, así como las partes donde crece y decrece la gráfica de una función, valores máximos y mínimos entre otras.

En esta actividad se logró observar inicialmente en algunos alumnos cierta dificultad en determinar el crecimiento y decrecimiento de la parábola cuando su concavidad era hacia abajo, logrando identificarlo con el apoyo de la pendiente de la recta tangente.

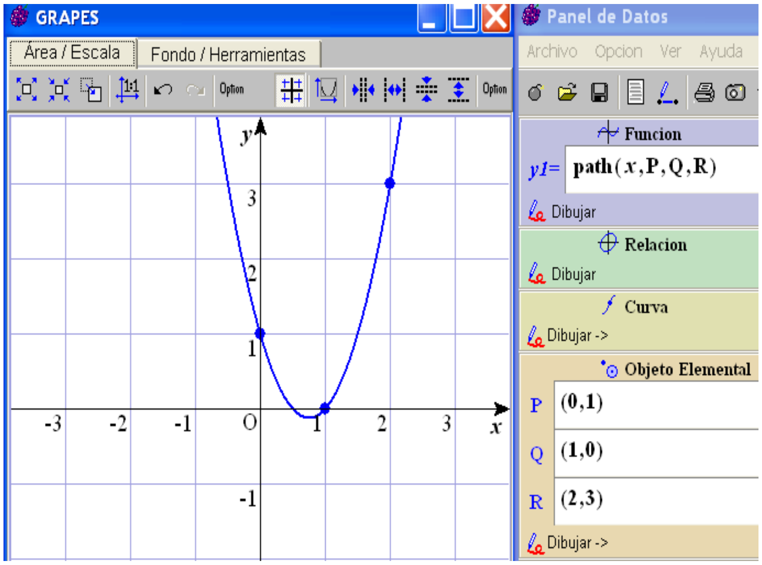
4.2.8. Actividad No. 8

Con el desarrollo de las actividades anteriores se ha pretendido que el estudiante construya significados importantes de la función cuadrática, que ayuden a éste poder pasar de una representación a otra y resolver problemas aplicados a través de la comprensión de dichos significados, la única conversión que se ha hecho en la actividad 3 es el paso de la representación algebraica, a la representación tabular y gráfica, que es lo que comúnmente se hace, aunque en este caso el énfasis se hace más en el tipo de ecuación correspondiente a una parábola.

El objetivo en esta actividad era convertir la representación gráfica de una función cuadrática a su representación algebraica.
Quizás este sea uno de los pasos de mayor dificultad para los estudiantes, como nos dice Duval (1999, p. 57), "Cuando la conversión se efectúa en el sentido escritura algebraica de una ecuación → gráfico, no parece surgir ninguna dificultad específica. Pero todo cambia cuando es necesario hacer la conversión inversa, incluso después de la enseñanza de las funciones lineales"

Para el desarrollo de esta actividad se usó el software matemático Grapes que permite el estudio de funciones, sabiendo que dado tres puntos no alineados siempre habrá una parábola que los contiene, se pidió a los alumnos que introdujeran las coordenadas (0,1), (1,0) y (2,3) de los puntos P, Q y R respectivamente, debemos aclarar que en este estudio no se consideran la parábolas cuya concavidad es hacia uno de los lados del eje **y**, por lo que se tomaron cuidadosamente aquellos puntos que nos dan parábolas con concavidad hacia arriba o hacia abajo, la siguiente figura muestra el resultado de lo que se pidió.

Figura No. 32



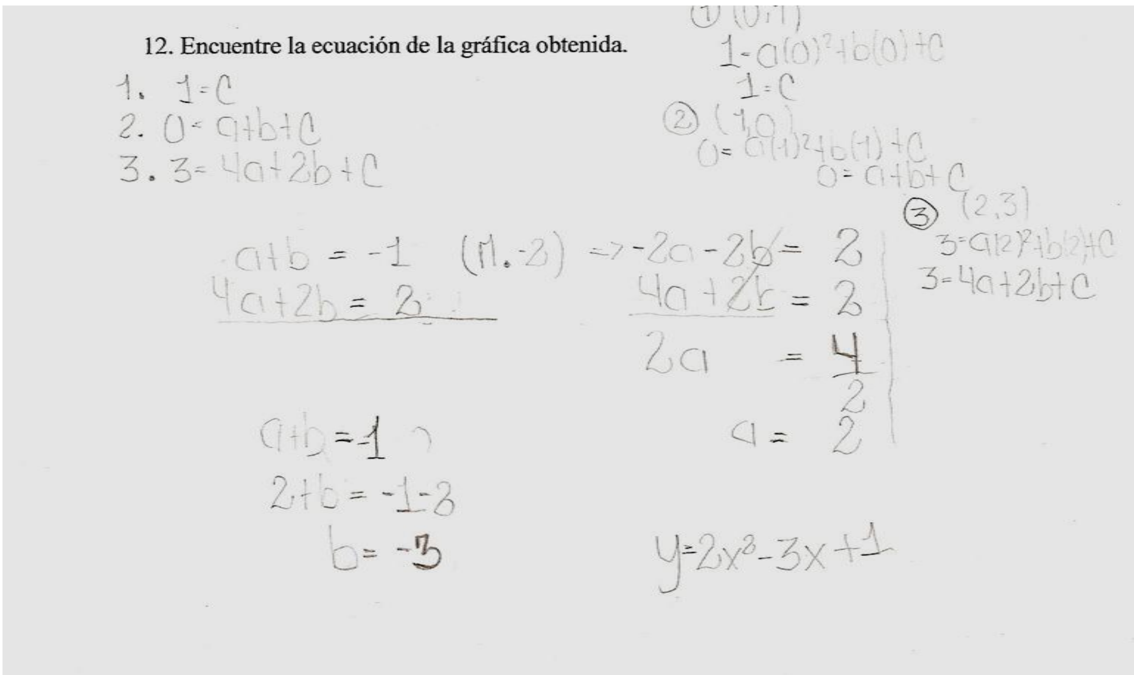
Parábola que pasa por los puntos (0,1), (1,0), (2,3) utilizando Grapes

El 100% de los estudiantes identifican que ésta es una parábola, debido a las actividades realizadas anteriormente saben que su representación algebraica es una ecuación de la forma $y = ax^2 + bx + c$, ya que, al proponerles que encontraran la ecuación la parábola obtenida anteriormente, el 100% utilizó esta expresión, sustituyendo en ella la variable **x** y la variable **y** por los valores de las coordenadas de cada uno los puntos, mediante esta sustitución obtuvieron un sistema de tres ecuaciones con tres variables lo que demanda en el alumno procesos cognitivos más complejos que el de pasar de la ecuación a la gráfica.

Duval(1999b, p. 57), nos dice que “Las unidades significantes del gráfico (recta, curva…) no están de ninguna manera determinados por la relación con los puntos marcados en no importa qué fondo milimetrado”, esto significa que los tres puntos seleccionados arbitrariamente no nos dice en absoluto cuales son los valores de los tres parámetros de la función, con excepción del punto (0, 1), de donde se puede deducir que el valor del parámetro **c** es 1, tal como parece haberlo deducido Yanitza, aunque a la derecha de este valor se ve que también lo hace por sustitución de las variables **x** y **y** por cero y uno respectivamente.

Para realizar esta conversión, además de saber que una parábola tiene una representación algébrica de la forma $y = ax^2 + bx + c$, es necesario manejar algún método de interpolación polinómica o la construcción y resolución sistema de ecuaciones para determinar la representación algebraicas de la función a partir de los tres puntos, a continuación se muestra el procedimiento realizado por la alumna Yanitza.

Figura No. 33

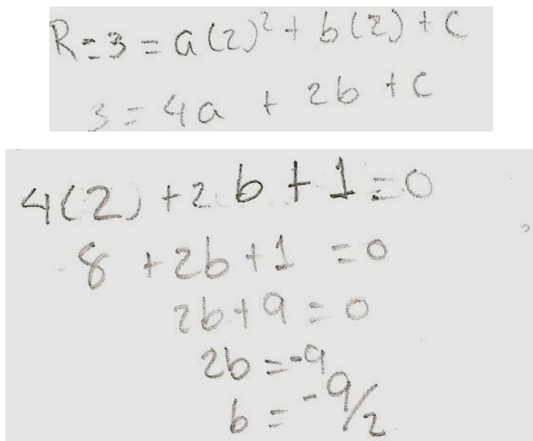


Procedimiento usado por Yanitza para encontrar la ecuación de la parábola que pasa por los puntos (0,1), (1,0) y (2,3).

Aunque el punto de intersección con el eje **y** con coordenadas (0,1) era uno de los tres puntos dados de la parábola los demás estudiantes determinan el valor del parámetro **c** sustituyendo **y** por uno, y **x** por cero, no aplicaron el criterio de que el punto de intersección con el eje **y** nos proporciona el valor correspondiente a este parámetro, sin embargo el valor encontrado es correcto. Sobre las unidades significantes, Duval nos continua diciendo, “estas unidades están determinadas por algunos valores visuales de la recta (o de la curva…), que están separadas del fondo constituido por los dos eje orientados. Las unidades significantes de un gráfico corresponden a los valores de diferentes variables visuales. El alumno que no discrimina estas variables, es como si fuera ciego para la conversión inversa a aquella que se enseña habitualmente. Esto quiere decir que él tiene pocas oportunidades para hacer una “lectura correcta” de los gráficos.

En esta actividad únicamente un alumno no encontró la ecuación correcta debido a que después de encontrar los valores de **a** y **c** y sustituirlo en una de las ecuaciones no la escribe correctamente, como se observa a continuación donde el término independiente de la ecuación es 3 y en la sustitución realizada desaparece este número y escribe cero.

Figura No. 34



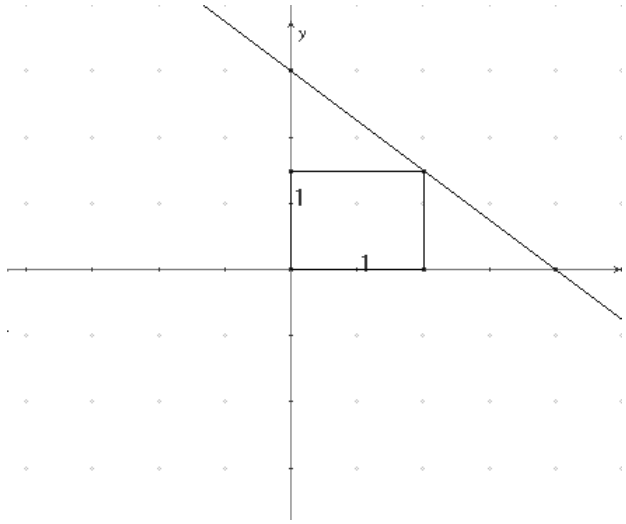
Intento de Francia para encontrar la ecuación de la gráfica que pasa por los puntos (0,1), (1,0) y (2,3).

Aunque el paso de la gráfica a la ecuación representa dificultades en los estudiantes, en esta actividad se tuvo mucho éxito por las conversiones realizadas anteriormente, ya que para poder realizar esta conversión se debe estar claro a qué familia de ecuaciones pertenece la representación algebraica de una parábola.

4.2.9. Actividad No. 9

El objetivo de la actividad era resolver el problema que consiste en determinar las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en un triángulo que forman los ejes y la recta que pasa por los puntos (4, 0) y (0, 3), ver la figura.

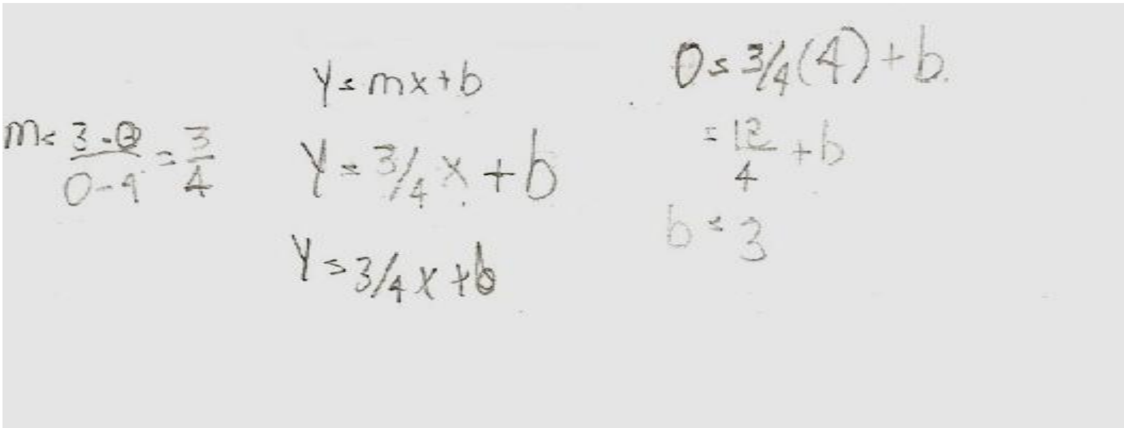
Figura No. 35



Rectángulo inscrito en el triángulo formado por la recta que pasa por los puntos (4,0) y (0,3) y el primer cuadrante usando Cabri.

Inicialmente se pedía ubicar en el plano cartesiano los puntos (4, 0) y (0,3), este pasaje no representó ninguna dificultad en los estudiantes, el 100% de ellos los ubicó correctamente, demostrando que, una vez que dominen los contenidos previos las tareas en la resolución de un problema se facilitará, cuando se le pidió que encontraran la ecuación correspondiente a la recta que pasaba por dichos puntos, de manera espontanea calculan inicialmente la pendiente, únicamente un alumno falló en su respuesta obteniendo un valor positivo, aquí se demostró que los alumnos aun no están familiarizados con el análisis de variables visuales y por eso recurren a procedimientos algebraicos que los conducen a cometer errores por el bajo dominio en la operaciones aritméticas con números negativos, otro error en la solución de ecuaciones lo conduce a obtener un valor correcto para la constante de la ecuación, este fue el único caso en que la ecuación encontrada no fue la correcta, obsérvese el procedimiento desarrollado.

Figura No. 36



Yefrin en su intento por encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (4,0) y (0,3)

Aquí se observó que el 90% prefirió resolver la ecuación y=mx+b sustituyendo los valores numéricos de y, m y x, el 10% optó por aplicar la fórmula $y-y_1=m(x-x_1)$, parece que resulta más fácil recordar la ecuación con pendiente ordenada al origen que la ecuación punto pendiente o existe mayor comodidad en el uso de ésta.

Después de encontrada la ecuación se construyen dos rectángulos inscritos en el triángulo con el fin de comparar sus áreas, el 100% de los estudiantes concluyen que las áreas de los rectángulos es distinta, argumentando en algunos casos que esto se debe a que las dimensiones eran diferentes, su respuesta era comprobada obteniendo cada una de las áreas con el uso de la herramienta “**Área**”, que permite calcular el área de un polígono. Dada la facilidad con que se manipulan los objetos en este software los estudiantes realizaron exploraciones donde visualizan la variación del área al cambiar el tamaño de uno de los rectángulos, con esto se logró que el estudiante comprendiera que existe un rectángulo que su área es mayor a la de los otros. Por la variedad de rectángulos que logran observar se propone encontrar la altura de uno en particular cuya base era de 2 unidades, aunque la tarea no fue fácil lograron visualizar que la ecuación de la recta les podía dar el valor de la altura deseada, únicamente un estudiante obtuvo una respuesta incorrecta debido a errores cometidos en las operaciones aritméticas realizadas.

Donde mostraron mayor dificultad fue al encontrar la ecuación que le permitiría calcular el área del rectángulo en términos de una sola variable, el 100% de ellos emplean correctamente la fórmula del área de un rectángulo, considerando que la base es **x** y la altura **y,** escribiendo así, A=xy, la dificultad inicia cuando se pide que escriban **y** en términos de **x** observándose nuevamente problemas para visualizar que la altura del rectángulo se obtiene con la ecuación de la recta aunque anteriormente la usaron para encontrar la altura del rectángulo de base 2 y justificaron que como el punto correspondiente a uno de los vértice estaba sobre la recta entonces conociendo el valor de la abscisa en cualquiera de sus puntos con su ecuación podían determinar el valor de **y**, solo a través de una serie de preguntas llegan a obtener la ecuación $A = x(\frac{-3}{4}x + 3)$. En este pasaje del problema se observó un poco de estrés y ansiedad porque su respuesta demandaba un proceso de mayor profundidad cognitiva a las anteriores sin embargo demostraron interés en resolverlo por la motivación extra que provoca en el joven el uso de medios tecnológicos. Únicamente el 80% de los estudiantes logró finalmente encontrar la ecuación correctamente, a continuación se describen algunas de pasajes de las escenas observadas.

Evelyn escribe la fórmula del área A=xy, al preguntar si en esa fórmula se pude escribir **y** en términos de **x**, contesta afirmativamente pero quizás la forma de lanzar la pregunta la confunde de modo que su planteamiento fue y=A/x, de igual manera Dasly contesta que despejando para **y**. Para que lograran comprender se hizo referencia a un caso particular donde debían encontrar la altura de un rectángulo de base 2, ya que allí lograron identificar que ésta se encontraba usando la ecuación de la recta, la particularización es una de las recomendaciones planteadas por Polya(1965, p. 31) en su propuesta sobre el enfoque de resolución de problemas en donde nos dice: "debemos cambiar, transformar o modificar el problema. ¿Puede enunciarse el problema en forma diferente? Ciertas cuestiones de nuestra lista sugieren medios específicos para variar el problema, tales como la generalización, la particularización, el empleo de la analogía, el descartar una parte de la condición, y así por el estilo."

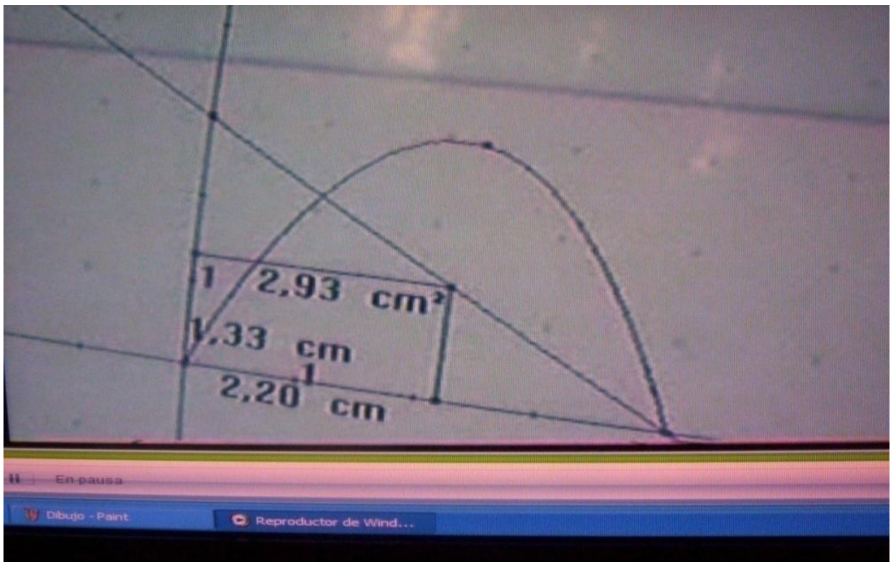
Aunque la resolución del problema representó cierto grado de dificultad en el estudiante esto los ayudará a afianzar su aprendizaje de la función en estudio, como señala Duval (1999, p. 40), las representaciones semióticas producidas intencionalmente, y por tanto, con cierto costo cognitivo, pueden ser “interiorizadas” para luego ser una producción automática, es decir, cuasi inmediatas y sin costo cognitivo, de tal manera que la conciencia queda libre para producir o tratar representaciones semióticas más complejas.

Una vez encontrada la ecuación fácilmente identifican que se trata de una ecuación cuadrática y que su gráfica es una parábola que representa el área de los rectángulos que se pueden inscribir en el triángulo dado, para determinar el área máxima aplican la fórmula del eje simetría y luego sustituyen este valor en la ecuación, esto debido a la claridad que tienen que si el valor del parámetro a en una función cuadrática es negativo su concavidad es hacia abajo y su vértice es un punto máximo.

El cálculo del área máxima no representó ningún problema en cada uno de los estudiantes que lograron obtener la ecuación, dando evidencias de que las actividades anteriores fueron un pilar fundamental para llegar a la solución del problema, desde la psicología cognitiva de Ausubel(1983) [citado por Tovar (2008, p. 2], la metodología en el aula se enfoca hacia la caracterización o develar del conocimiento previo que el estudiante posee en sus estructuras; ya sea el aprendido durante su interacción con el entorno y su cultura o aquél construido dentro del mismo sistema educativo. Esto implica que el docente formule modelos de evaluación que le ofrezcan la información necesaria para a partir de ella, tener la posibilidad de tomar decisiones y diseñar estrategias que sean acordes y consecuentes con las características de los estudiantes.

Un comentario de los alumnos al final de las actividad fue “por fin comprendí por qué aplicaba la fórmula $\frac{-b}{2a}$ para determinar el valor de de la altura máxima en el lanzamiento de una pelota”, lo anterior lo habían aplicado en clases de Física Elemental, esto se dio porque para completar la actividad con el uso de las herramientas de Cabri se graficó la ecuación correspondiente para terminar de visualizar el punto máximo de la parábola y compararlo con el valor del área máxima obtenida, la figura se presenta a continuación, como se observa el área visualizada para el rectángulo mostrado era de 2.93 cm^2, moviendo el punto ubicado en el eje **x** lograban visualizar el área máxima que luego compararían con el punto máximo de la porción de la parábola desplegada que representaba el área de todo los rectángulos inscritos.

Figura No. 37



Parábola que describe el área de los rectángulos inscritos en el triángulo formado por la recta y los dos ejes en el primer cuadrante del plano usando Cabri

Por sus comentarios está claro que comprendieron que la gráfica representaba el área de los diferentes rectángulos que podían ser inscritos en el triángulo. El 20% de los alumnos que no lograron desarrollar completamente la actividad no pudo ser atendido de manera personalizada como señala Polya(1965, p. 25), el estudiante debe adquirir en su trabajo personal la más amplia experiencia posible. Pero si se deja solo frente a su problema, sin ayuda alguna o casi ninguna, puede que no progrese. En actividades posteriores mostraremos como los estudiantes resuelven problemas únicamente con lápiz y papel.

4.2.10. Actividad No. 10

Con el fin de comprobar qué tanto perdura el conocimiento adquirido después del desarrollo de las actividades anteriores se consideró un intervalo de tiempo de aproximadamente un mes para aplicar esta última que contenía seis ejercicios relacionados con la conversión de un sistema de representación a otro, que debían realizar en un tiempo estimado de 70 minutos en una sola sesión, ¿por qué este tiempo?, esto se consideró porque el tiempo empleado en las 6 actividades del diagnóstico realizada en el curso de Álgebra de la Universidad Pedagógica Nacional "Francisco Morazán" fue similar, con la diferencia que en este curso se hizo una actividad por día. Esta actividad fue diseñada de manera similar al diagnóstico.

En el primer ejercicio se dio la función $y = x^2 + 2x - 3$, su trabajo consistía en convertir ésta en su representación tabular, completando una tabla donde se daban los valores para **x**, ellos debían encontrar el valor correspondiente a **y**, el 100% de los estudiantes desarrollo la actividad completa de manera correcta sustituyendo la variable **x** con los valores dados en la tabla, no mostraron ninguna dificultad con el uso de números negativos en las operaciones aritméticas.

En el segundo ejercicio se da una tabla de valores correspondiente a una función cuadrática, se pedía que graficaran los puntos en el plano cartesiano, a diferencia de la actividad del diagnóstico, se pidió que explicaran si los datos correspondían a una función y a qué tipo correspondía. Este es el paso que menos dificultad representa para el estudiante; aquí al igual que en la prueba diagnóstico también quedó demostrado, ya que el 100% ubicó correctamente los puntos, la gráfica obtenida por ellos fue una parábola, además el 100% contesta que es una función, aunque, únicamente el 20% explica por qué, también el 100% contesta que es una función cuadrática porqué su gráfica es una parábola, la siguiente figura muestra el ejercicio planteado en esta actividad.

Figura No. 38

Ejercicio 2

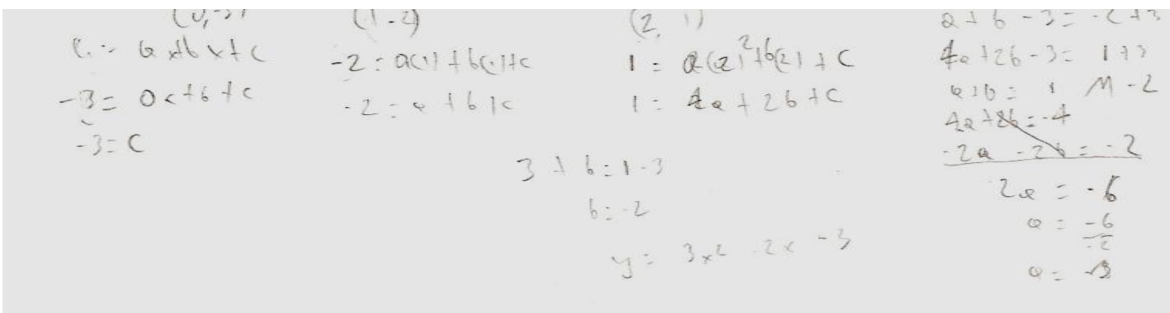
En el plano cartesiano que se le presenta a continuación grafique los puntos que se le presenta en la tabla, explique si es función si su respuesta es afirmativa, explique si es lineal, cuadrática o ninguna de éstas.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	6	1	-2	-3	-2	1	6

Ejercicio 2 de la actividad final

En este ejercicio debemos destacar dos acontecimientos, el primero se trata de Owen, quien además encontró la representación algebraica de la función mediante un sistema de ecuaciones, la figura muestra el hecho.

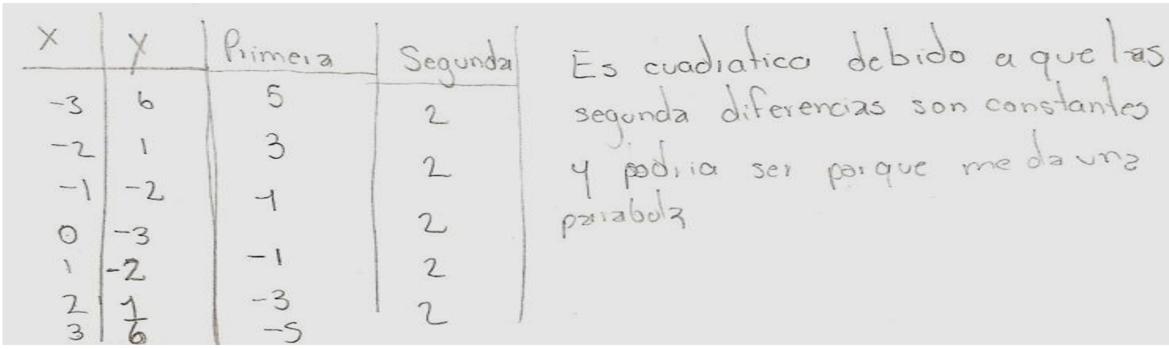
Figura No. 39



Procedimiento de Owen encontrando la ecuación cuadrática que representa los datos de la tabla

El segundo caso es el de Dasly, quien hizo uso del patrón descubierto en una de las actividades anteriores sobre las primeras y segundas diferencias con los valores de **y** para comprobar si se trata o no de una función cuadrática, dando una doble explicación, una es que las segundas diferencias da un constante y que la gráfica es una parábola por eso es una función cuadrática.

Figura No. 40



x	y	Primera	Segunda
-3	6	5	2
-2	1	3	2
-1	-2	1	2
0	-3	-1	2
1	-2	-3	2
2	1	-5	2
3	6		

Es cuadiatico debido a que las segunda diferencias son constantes y podia ser porque me da una parabola

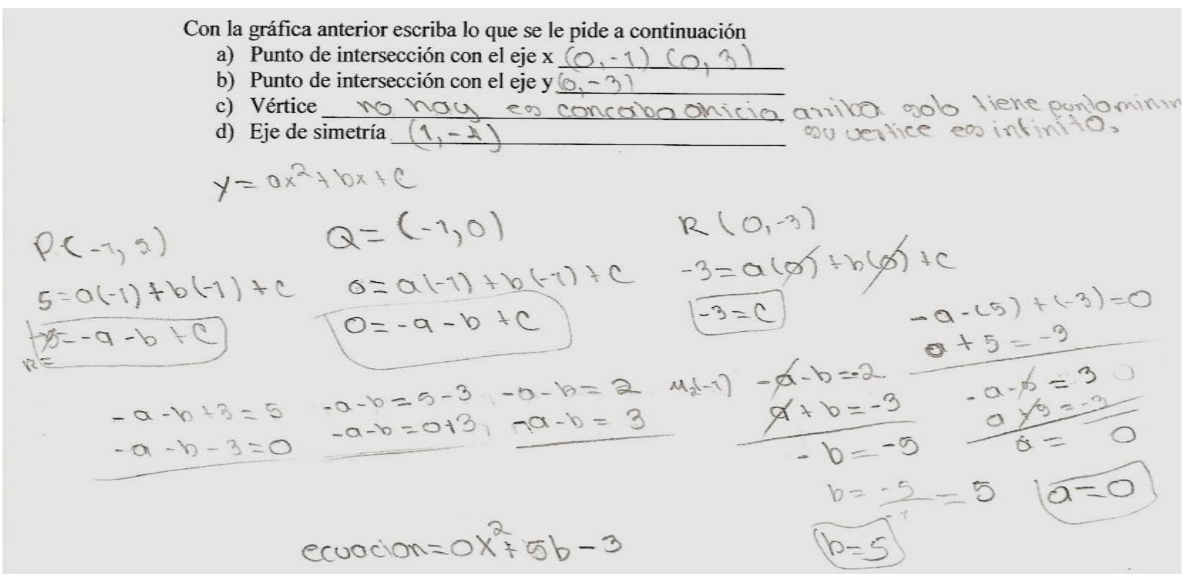
Dasly, aplicando el criterio de las segundas diferencias para comprobar si los datos corresponden a una función cuadrática

En el tercer ejercicio se da la ecuación $y = x^2 - 2x - 8$, se pedía que graficaran en el plano, a diferencia de la prueba diagnóstico no se piden las coordenadas del vértice, los puntos de intersección con los ejes, ni la ecuación del eje de simetría con el fin de evitar dar sugerencias para obtener correctamente la gráfica, además se trata de probar si con el desarrollo de las actividades anteriores el alumno sigue el uso tradicional de construir una tabla para poder graficar. El 80% de los estudiantes graficó correctamente la función, el 60% del grupo obtuvo los puntos de intersección y el vértice, además encontraron otros puntos evaluando la función para ciertos valores de **x** obteniendo una mejor representación gráfica de la parábola correspondiente, únicamente un estudiante no desarrolló el ejercicio, de hecho fue poco el trabajo que desarrolló en toda la actividad, se notó un poco distraído y sin interés.

En el ejercicio 4 se presentó en un plano la figura correspondiente a una parábola, se pidió encontrar la representación algebraica correspondiente, puntos de intersección con los ejes, vértice y eje de simetría. El 80% desarrolla el ejercicio completo correctamente, todos inician su camino escribiendo la ecuación general de la función cuadrática, recordemos que en la actividad 3 los estudiantes llegaron por su cuenta a descubrir que la ecuación de todas las parábolas que habían representado en Cabri tenían asociada una ecuación cuadrática, concluyendo que esto ocurre en toda parábola, de tal manera que sustituyen en esta ecuación el valor de **x** y **y** con los valores de las coordenadas de tres puntos de la gráfica, obteniendo de esta manera un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas que desarrollaron correctamente.

Walter quien fue uno de los que no encuentra la respuesta correcta, plantea inicialmente la ecuación general y sustituye en ella los valores de **x** y **y** usando las coordenadas de tres puntos de la gráfica como se puede observar a continuación, su problema ocurre en la sustitución de la variable **x** de grado dos, en la sustitución de ésta por -1 omite este exponente, además consideró el punto (-1,5) que no correspondía a la gráfica, razones por la que obtiene una ecuación incorrecta ya que esta sustitución le cambia por completo el resultado, la siguiente figura muestra el desarrollo de Walter.

Figura No. 41


Con la gráfica anterior escriba lo que se le pide a continuación
a) Punto de intersección con el eje x (0,-1) (0,3)
b) Punto de intersección con el eje y (0,-3)
c) Vértice no hay es concabo ahicia arriba solo tiene punto minim su vertice es infinito.
d) Eje de simetría (1,-4)

y = ax^2 + bx + c

P (-1,5) Q = (-1,0) R (0,-3)

5 = a(-1) + b(-1) + c
5 = -a - b + c

0 = a(-1) + b(-1) + c
0 = -a - b + c

-3 = a(0) + b(0) + c
-3 = c

-a - b + 3 = 5
-a - b - 3 = 0

-a - b = 5 - 3
-a - b = 0 + 3

-a - b = 2
-a - b = 3

-a - b = 2
a + b = -3
-b = -5
b = -5/-1 = 5
b = 5

-a - (5) + (-3) = 0
a + 5 = -3

-a - b = 3
a + b = -3
a = 0

a = 0

ecuacion = 0x^2 + 5b - 3

Walter en su intento por encontrar la ecuación de la parábola dada en el plano que pasa por los puntos (-2,5), (-1,0), (0,-3), (1,-4), (2,-3)

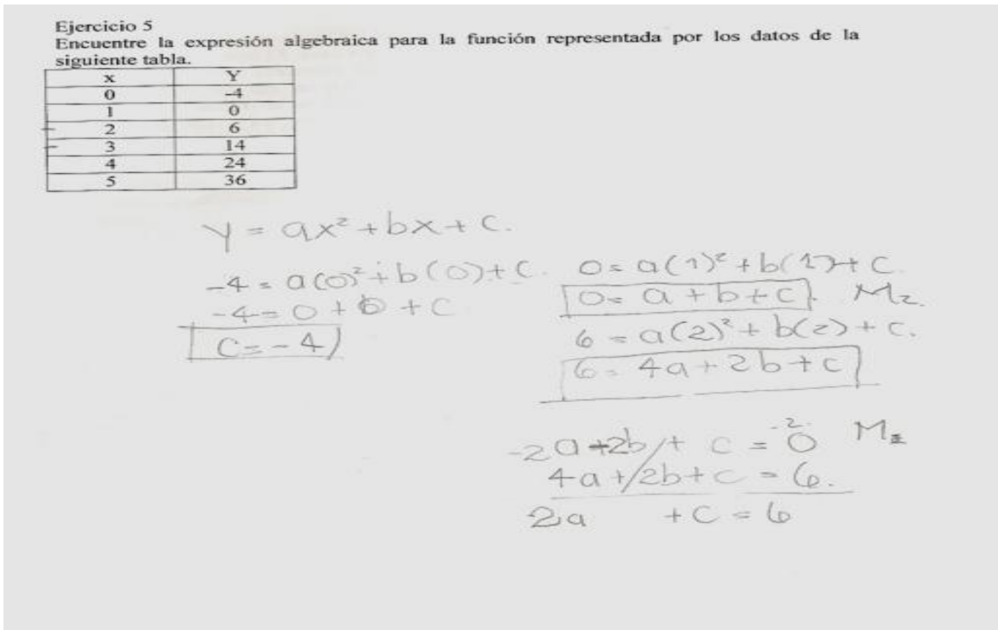
En este caso debemos observar que para él, dentro de la familia de ecuaciones cuadráticas a la que pertenece la ecuación de una parábola también están aquellas donde el coeficiente del término cuadrático es cero, no está claro que la gráfica en este caso será una línea recta, debemos mencionar que en ninguna actividad se hizo énfasis en este caso, aún cuando se cambió el parámetro **a** no se pidió explicación alguna de lo que ocurre cuando este parámetro adquiere el valor de cero, únicamente se decía que debía ser distinto de cero. Escribe correctamente los puntos de intersección no así el vértice y el eje de simetría, no tiene claridad en el concepto de vértice ya que su respuesta es que no hay, además dice que este es infinito, no podemos decir con certeza con que otro significado ésta confundiendo el vértice.

Yefrin, nuevamente no logra desarrollar la actividad completa, únicamente escribe el vértice, un punto de intersección con el eje **x** y el punto de intersección con el eje **y**.

En el ejercicio 5 se da una tabla de valores correspondientes a una función cuadrática y se pidió que encontraran la ecuación correspondiente, en este ejercicio es donde menos aciertos hubo, siendo éste el paso que más les dificultó a los estudiantes, aunque, el procedimiento empleado fue el mismo que utilizaron en la actividad anterior, plantean la ecuación general, sustituyen los valores de la variable **x** y **y,** luego resuelven el sistema obtenido. Únicamente el 60% encuentra la ecuación correctamente, sin embargo, sólo el 30% probó si aplicando las segundas diferencias en los valores de **y** obtenía una constante, el 30% que no realizó esta prueba, se habrían encontrado en u problema si los datos no hubiesen correspondido a una función cuadrática; aunque si los puntos considerados no están alineados probablemente habrían encontrado una ecuación cuadrática por lo que se mencionó en actividades anteriores, que dados tres puntos no alineados existe una parábola que los contiene.

Aunque un 40% no obtuvo correctamente la ecuación debemos aclarar que todos lo hacen mediante un sistema de ecuaciones la falla estuvo en que algunos valores obtenidos fueron incorrectos por diferentes razones como: sustituciones incorrectas, operaciones incorrectas y por desarrollo incompleto, obsérvese en la siguiente figura el procedimiento de Yefrin uno de los estudiantes que no completo el ejercicio.

Figura No. 42



Ejercicio 5
Encuentre la expresión algebraica para la función representada por los datos de la siguiente tabla.

x	Y
0	-4
1	0
2	6
3	14
4	24
5	36

$y = ax^2 + bx + c.$

$-4 = a(0)^2 + b(0) + c.$ $\quad 0 = a(1)^2 + b(1) + c$

$-4 = 0 + 0 + c$ $\quad \boxed{0 = a + b + c}$ M2

$\boxed{c = -4}$ $\quad 6 = a(2)^2 + b(2) + c.$

$\boxed{6 = 4a + 2b + c}$

$-2a + \cancel{2b} + c = \overset{-2}{0}$ M1

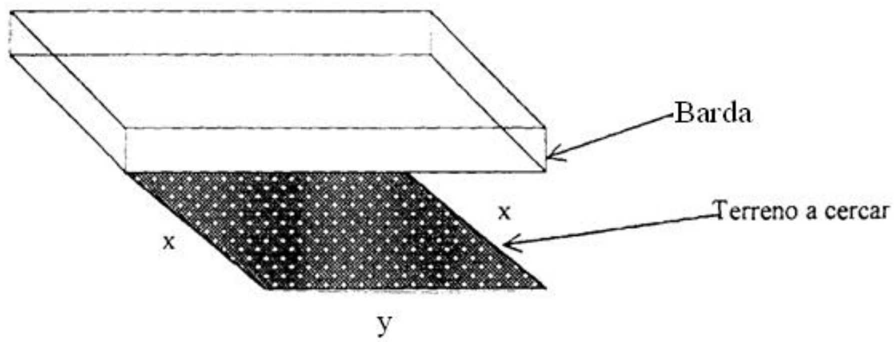
$4a + \cancel{2b} + c = 6.$

$2a \quad + c = 6$

Yefrin en su intento por encontrar la ecuación correspondiente de la función cuadrática dada en su representación tabular

El ejercicio 6 consistía en resolver el siguiente problema de aplicación

Un granjero le dijo a su hijo que utilizara 50 metros de alambre para cercar un terreno y que ese espacio lo utilizara para construir una casa. El hijo, muy astuto, se preguntó si con los 50 metros de alambre podría conseguir diferentes tipos de terrenos y así escoger el más grande. En los terrenos de su padre había un lado que colindaba con otra construcción donde había una barda. Lo primero que se le ocurrió al hijo fue construir la cerca de manera que uno de los lados fuera la barda, así podría aprovechar parte del alambre para cubrir más área. (Vea la figura)



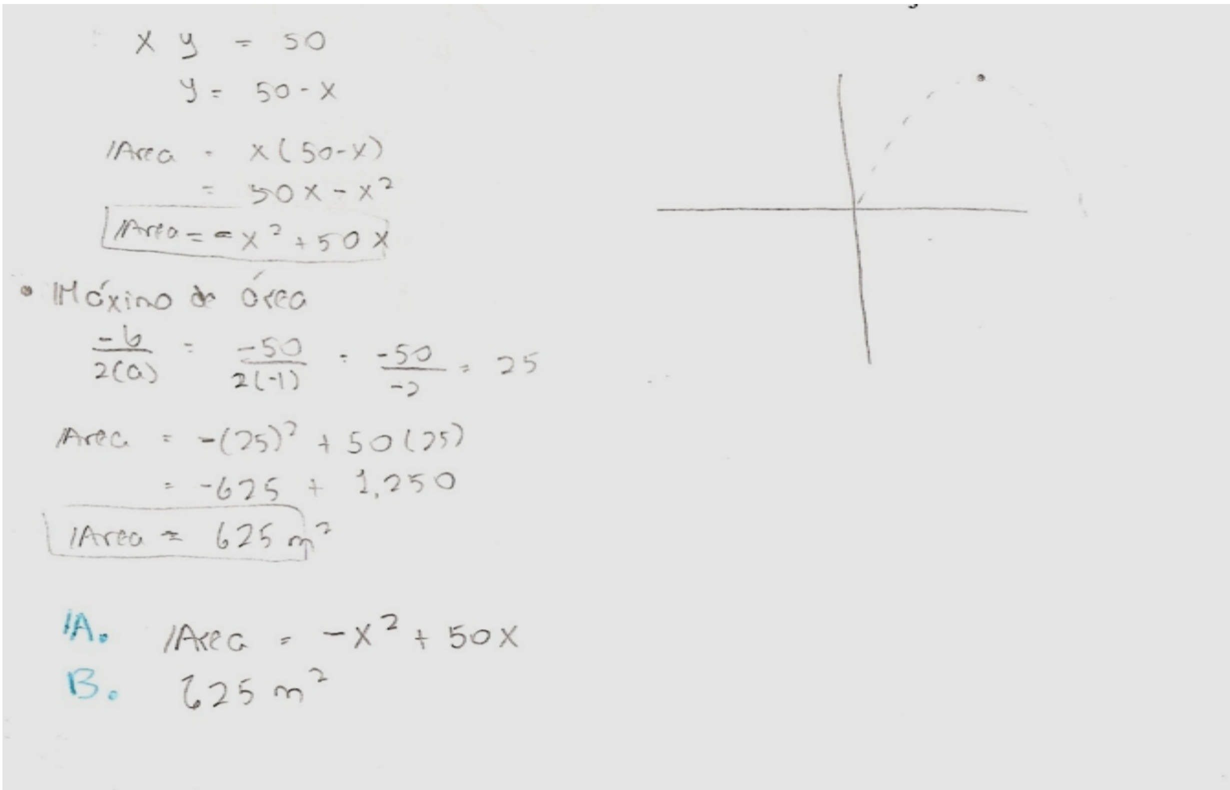
- Encuentre una expresión algebraica para representar el área del terreno en función de x.
- ¿Cuál es el máximo de área que puede obtener de esta manera el hijo?

El 80% de los estudiantes desarrolló correctamente el problema lo que demuestra que existió una correcta interpretación, tenían buen manejo de términos empleados como ser expresión algebraica y área máxima, existe buen manejo de fórmulas para calcular áreas y perímetro, estos aspecto se deben considerar cuando se hace uso de el enfoque de resolución de problemas.

De nuevo nos encontramos que Yefrin no realizó ningún intento por resolver el problema quizá para él no era el momento indicado para el desarrollo de esta actividad ya que de 6 ejercicios sólo dos hizo correctamente, en dos no hizo absolutamente nada y los otros dos no los concluyó, esto y la actitud mostrada es un indicativo para creer que no se debió trabajar en ese momento con él, debemos mencionar también que para aplicar esta actividad se tomaron los alumnos por sorpresa, no se les avisó con anticipación que se realizaría, hasta el momento de su aplicación, esto con el fin de obtener resultados más significativos.

Maylin, otra de las que no resolvió el problema correctamente fue porque no consideró que la longitud de uno de los lados debía ser 2**x** ya que eran dos lados de la cerca con longitud **x**, por lo que la ecuación encontrada difiere con la real en el coeficiente del término cuadrático, su procedimiento es correcto, además está clara por qué determinar el valor de la abscisa en el vértice dibujando una parábola con concavidad hacia abajo, en la siguiente figura se puede observar como inicialmente plantea las dos longitudes pero no escribe el signo correspondiente a la suma de ellas, es probable que esto se deba más a un olvido ya que al despejar para **y** escribe la **x** al lado derecho con signo negativo.

Figura No. 43



Maylin en su intento por resolver el problema de aplicación de la función cuadrática

CAPÍTULO 5

5.1. CONCLUSIONES

Existe una diversidad de representaciones en Matemática, respecto a la función cuadrática tenemos la representación gráfica, tabular, analítica y verbal, a través de la conversión de una representación a otra podemos lograr un aprendizaje significativo, para el logro de este objetivo, es necesario que el estudiante comprenda las propiedades básicas en cada uno de los registros de representación, que permitan establecer conexiones con las demás representaciones.

Mediante el uso de la hoja de cálculo Excel, los estudiantes pudieron descubrir que al tener los datos de una tabla con los valores de **x** en serie y calculando las segundas diferencias con respecto a los valores de **y,** al obtener una constante, tenemos que los datos corresponde a una función cuadrática, de esta manera al revisar los datos de diferentes tablas logran identificar aquellas correspondientes a una función cuadrática. Este pasaje es importante porque si se logra descubrir a qué tipo de función corresponden los datos en su representación tabular, podemos obtener la ecuación y la gráfica correspondiente usando la familia de ecuaciones a la que pertenece. La dificultad encontrada en este tipo de actividades fue el uso de fórmulas en la hoja electrónica de cálculos Excel.

Mediante el uso del software dinámico Cabri Géomètre II, los estudiantes descubrieron que la gráfica de una función de la forma $y=ax^2 + bx + c$, es una parábola, esto lo lograron ubicando cinco puntos correspondiente a una función de este tipo en el plano cartesiano de Cabri, la cual con la opción "**cónica**" se despliega la gráfica correspondiente a estos puntos, dando como resultado una parábola, realizando diferentes traslaciones de esa parábola, observan que las ecuaciones correspondiente son cuadráticas. Aquí observamos que el estudiante en la aprehensión local por punteo para el paso de la escritura simbólica a la gráfica no tiene dificultad pues como nos dice Duval (1999a, p. 70), para lograr este paso, “Basta una “demarche”[1] de punteo centrado en dos elementos del tipo {pareja de valores numérico, un punteo de cuadrícula} para construir una recta. No hay nada más que discriminar ni que tomar en cuenta”, en nuestro caso tratándose de la parábola, que aunque si hay otros elementos que discriminar como el vértice por ejemplo, no era necesario tal discriminación.

Descubren que el valor del parámetro c es el que cambia el punto de intersección de la gráfica con el eje **y,** de modo que al darles una lista de ecuaciones cuadráticas de la forma $y= ax^2 + bx +c$, escriben el punto de intersección como (0, c). Esto lo lograron graficando inicialmente la ecuación $y=0.5x^2 – x + 2$, y cambiando este parámetro con diferentes valores. Con esto el estudiante al tener en una tabla el punto de intersección con el eje **y,** podrá reconocer el valor de la ordenada, como el valor correspondiente al parámetro c de la ecuación, esto le facilitara el camino para la conversión de la ecuación a la gráfica, y de la gráfica a la ecuación si se logra identificar las coordenadas del punto de intersección de ésta con el eje **y.**

De igual forma a lo anterior a través del cambio del valor del parámetro **a** en la ecuación llegan a la conclusión que si este valor es negativo la concavidad de la parábola es hacia abajo y su vértice es un punto máximo, si es positivo la concavidad es hacia arriba y su vértice es un punto mínimo. Esta propiedad permite la comprensión en la solución de problemas aplicados para encontrar la altura máxima de un objeto cuya trayectoria describe una parábola. Además, nos permite una mayor claridad en el paso de la ecuación a la gráfica.

Trazando un segmento paralelo al eje **x** cuyos extremos se ubicaban en la parábola y trazando la mediatriz de este segmento obtienen el eje de simetría de esta gráfica, después de repetidos cambios en los parámetros **a** y **b** y visualizando la ecuación mostrada en Cabri, del eje de simetría, intentaron encontrar la ecuación general en términos de sus parámetros, tarea que representó mucha dificultad ya que en Cabri se muestran las fracciones ya

[1] Duval lo usa con mucha frecuencia para designar todo lo que alguien hace para llegar a un resultado, incluidas todas las tentativas y las falsas pistas abandonadas.

simplificadas de tal forma que, si los valores correspondiente a los parámetros **a** y **b** respectivamente eran 3 y 4 la ecuación mostrada era -2/3 y el valor que esperaban visualizar era -4/6. Se observó que el alumno concentra tanto su atención en los resultados de la computadora que no intenta desarrollar operaciones manuales; quizás esto pudo ser superado si detiene un poco su atención en el número que esperaba obtener para darse cuenta que éste podía ser simplificado. Se puede decir que en algunos casos como éste, el uso de la tecnología se convierte en un obstáculo para desarrollar habilidades de tipo operatoria.

Descubren que a través de la representación gráfica existen puntos que no se pueden obtener mediante la visualización, para esto es necesario realizar cálculos utilizando otras representaciones, como ocurrió en el caso de los puntos de intersección con el eje **x** de la representación gráfica de la función $y = x^2 + 3x - 1$, donde, mediante el uso de Grapes obtenían la gráfica y al pedirles que encontraran el valor de uno de los puntos de intersección con el eje **x** se dan cuenta que su apreciación visual no es suficiente, teniendo que aplicar la fórmula general para resolver una ecuación cuadrática. Sin embargo el software fue propicio para descubrir procedimientos que a los matemáticos les tomó mucho tiempo para descubrirlos.

El paso que más se les dificultó fue el de la representación tabular a la representación algebraica y es que aquí la relación entre los datos, no son como en las variables visuales en una gráfica, ya que la gráfica de inmediato nos puede sugerir el tipo de ecuación que se debe obtener (la recta una lineal, la parábola una ecuación cuadrática), no así los datos de una tabla en la que para darse cuenta que se trata de una función cuadrática cuando los datos en **x** están en serie, debemos conocer al menos un método de interpolación polinomial o el método de la segundas diferencias utilizado en una de las actividades desarrolladas.

5.2. RECOMENDACIONES

A la Universidad Pedagógica Nacional “Francisco Morazán” para que en coordinación con la Secretaria de Educación, desarrollen programas de actualización de Docentes de Educación Media para que puedan incorporar las innovaciones, que ya son bastantes y quizás sean desconocidas por ellos.

Ubicar en la página Web de la Universidad Pedagógica Nacional “Francisco Morazán”, enlaces de secciones donde se publiquen artículos relacionados con las nuevas tendencias en Educación Matemática.

Ubicar en la página Web de la Universidad Pedagógica Nacional “Francisco Morazán”, investigaciones desarrolladas por los egresados de las diferentes carreras de Postgrado.

Introducir en los cursos básicos de Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional “Francisco Morazán”, en cada uno de sus programas, actividades encaminadas con la aplicación de las nuevas tendencias en Educación Matemática.

A las autoridades de las diferentes instituciones de Educación Media, que desarrollen talleres de capacitación con los docentes de matemática para la implementación de tareas que involucren las nuevas tendencias en Educación Matemática.

A los docentes para que tomen conciencia del papel que les corresponde y permanezcan en constante actualización y capacitación con el propósito de mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje a través de la implementación de las nuevas tendencia en Educación Matemática.

Referencias Bibliográficas

Ballester Vallori, Antoni (2002). "El aprendizaje significativo en la práctica, seminario de aprendizaje significativo". http://www.aprendizajesignificativo.com/ (visita 06/2008)

Castañares, Wenceslao (2005). "La semiótica de C.S. Peirce y la tradición lógica". http://www.unav.es/gep/Castanares.html.

D'amore, Bruno(2004). *Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución*. Barcelona, España.

De la Rosa Nolasco, Adrián (2002). "La calculadora como instrumento de mediación". Revista Electrónica de Matemática Universidad Autónoma de Querétaro, Departamento de Matemática. http://www.uaq.mx/matematicas/redm/art/a0702.pdf

Dolores Flores, Crisólogo (1998). "Algunas ideas que acerca de la derivada se forman los estudiantes del bachillerato en sus cursos de cálculo". Grupo Editorial Iberoamérica. Investigaciones en Matemática II. Fernando Hitt (Editor). México.

Duval, Raymond (1999a). *Los Problemas Fundamentales en el Aprendizaje de las Matemáticas y las Formas Superiores en el Desarrollo Cognitivo*. Edición en castellano 2004. Grupo de Educación Matemática de la Universidad del Valle. Santiago de Cali, Colombia.

Duval, Raymond (1999b). *Semiosis y Pensamiento Humano, Registros semióticos y Aprendizajes intelectuales*. Traducción, 1999. Grupo de Educación Matemática de la Universidad del Valle. Santiago de Cali, Colombia.

Estrada, Juan (2005). "Diseño de situaciones dinámicas en un ambiente computacional como un escenario para el aprendizaje de conceptos fundamentales del cálculo". Memorias del XIII encuentro de profesores de matemática (p. 33). http://polya.dme.umich.mx/eventos/MemoriaXIII.pdf

Font, Vicenç (2001). "Reflexiones didácticas desde y para el aula". Expresiones simbólicas a partir de gráficas. El caso de la parábola. Revista EMA 2001, vol. 6, nº 2, 180-200. http://www.webpersonal.net/vfont/(04)RD.pdf

Godino, Juan D. (2003). "Teoría de las Funciones Semióticas". Departamento de Didáctica de la Matemática Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada. http://www.ugr.es/local/jgodino/

Hitt Espinoza, Fernando (1998), "Matemática Educativa: Investigación y Desarrollo 1975-1997", Grupo Editorial Iberoamérica. Investigaciones en Matemática II. Fernando Hitt (Editor). México.

Hitt, Espinoza (2002). *Funciones en contexto*. 1era Edición. Pearson Educación. México.

Sacristán Rock, Ana Isabel (1997). Windows on the infinites constructing meanings in a LOG-BASED Microworld. Tesis de Doctoral. CINVESTAV-IPM. México.

Secretaria de Educación Pública (2003). C*urrículo Nacional Básico* (CNB). Honduras.

Secretaria de Educación Pública (2003). *Diseño Curricular Nacional para la Educación Básica* (CNB). Honduras.

Hitt, Fernando(2003). "Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología". Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, No. 2. 213-222.

NCTM (2000). *Principios y Estándares para la Educación para la Educación Matemática. Primera edición en castellano*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática, Thales. Sevilla.

Polya, G. (1965). *Como plantear y resolver problemas*. Vigésima primera impresión, junio 1997. Editorial Trillas. México.

Santos Trigo, Luz Manuel (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las Matemáticas*. 2ª Edición. Grupo Editorial Iberoamérica, México D.F.

Tovar Gálvez, Julio Cesar (2008). "Modelo metacognitivo como integrador de estrategias de enseñanza y estrategias de aprendizaje de las ciencias, y su relación con las competencias". Revista Iberoamericana de Educación n.º 46/7 – 25 de julio de 2008, EDITA: Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI). http://www.rieoei.org/

Weber, Jean E. (1999). *Matemáticas para la administración y Economía*. 4ta Edicion. Oxford University Press. México

ANEXOS

Anexo No 1

Actividades del Diagnóstico.

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL "FRANCISCO MORAZÁN"

PRUEBA DIAGNÓSTICO

Nombre: ____ Sección: __________

Título Preuniversitario: __________________________________ Fecha: ____________

Objetivo: Explorar los conocimientos adquiridos a cerca de la función cuadrática a nivel preuniversitario y analizar los procedimientos realizados en cada una de las actividades propuestas.

Indicaciones: En ésta prueba se le presentarán cinco actividades que deberán desarrollarse una por día, en cada una de ellas podrá usar calculadora, se solicita su valiosa colaboración para llevar a cabo el análisis correspondiente.

Actividad 1

Dada la función $y = x^2 + 2x - 3$, complete la siguiente tabla, determinando el valor de y para cada uno de los valores de x dados, cualquier cálculo realizado debe dejarlo escrito en el espacio de trabajo.

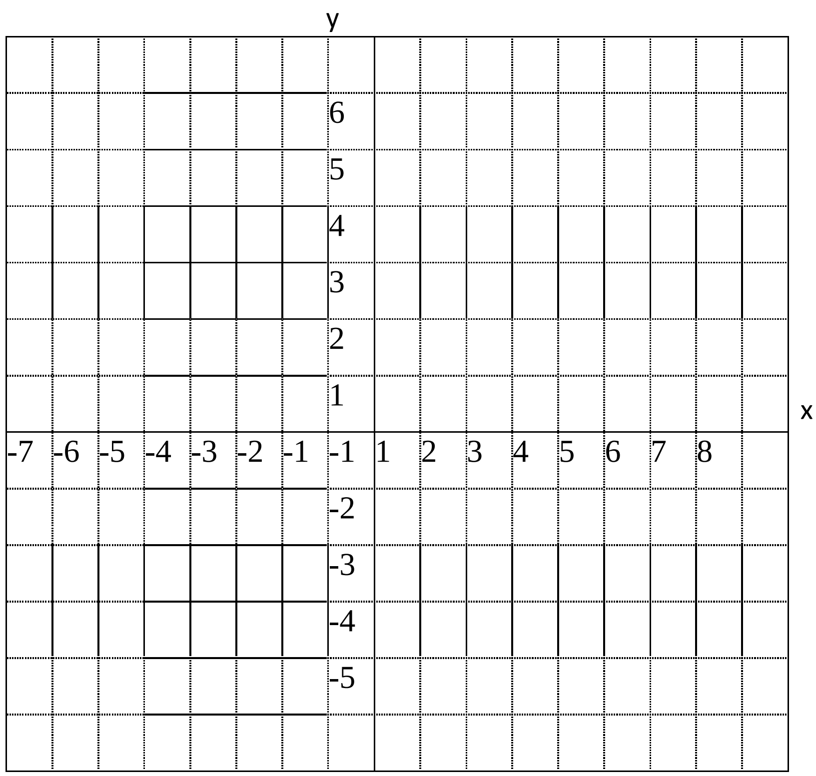
X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y							

Actividad 2

Grafique los puntos que se dan en la siguiente tabla en el plano cartesiano dado más abajo.

(Nota: Dibuje la gráfica uniendo los puntos obtenidos con línea suave).

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	6	1	-2	-3	-2	1	6

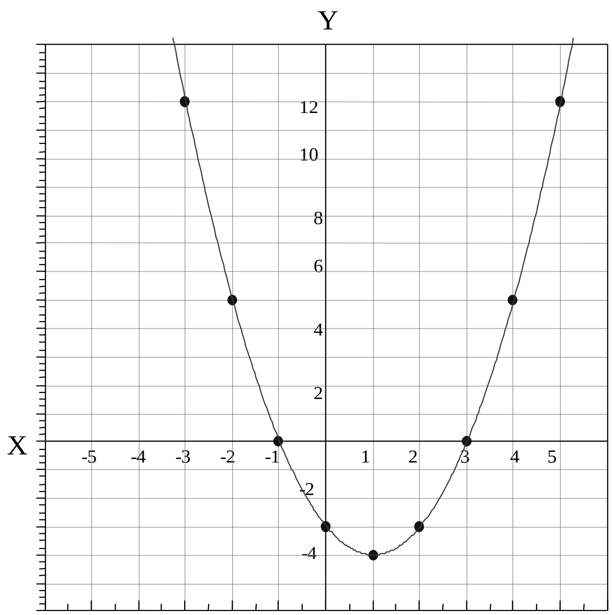


Actividad 3

Grafique la función $y = x^2 – 2x – 8$ en el sistema cartesiano que se presenta a continuación.

Actividad 4

A continuación se le presenta la gráfica de una de una función cuadrática, encuentre su ecuación y escriba en el espacio lo que se le pide en cada inciso.



Intercepto en x ______________________________

Intercepto en y ______________________________

Vértice ____________________________________

Eje de simetría _______________________________

Actividad 5

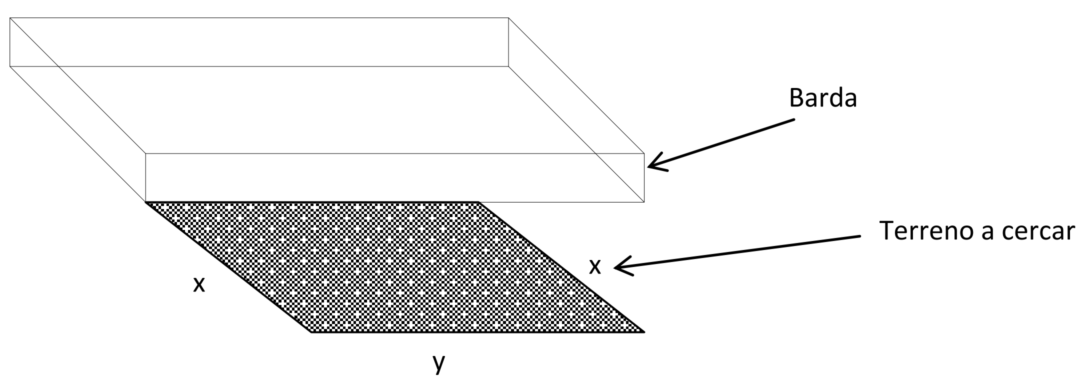
Encuentre la expresión algebraica para la función representada por los datos de la siguiente tabla.

X	Y
0	-4
1	0
2	6
3	14
4	24
5	36

Actividad 6

Resuelva el siguiente problema.

Un granjero le dijo a su hijo que utilizara 50 metros de alambre para cercar un terreno y que ese espacio lo utilizara para construir una casa. El hijo, muy astuto, se pregunto si con los 50 metros de alambre podrían conseguir diferentes tipos de terrenos y asi escoger el más grande. En los terrenos de su padre había un lado que colindaba con otra construcción donde había una barda. Lo primero que se le ocurrió al hijo fue construir la cerca de manera que uno de los lados fuera la barda, así podría aprovechar parte del alambre para cubrir más área. (Vea la figura).



Encuentre una expresión algebraica para representar el área del terreno en función de x.

¿Cuál es el máximo de área que puede obtener de esta manera el hijo?

Anexo No 2

Actividades del grupo objeto de investigación.

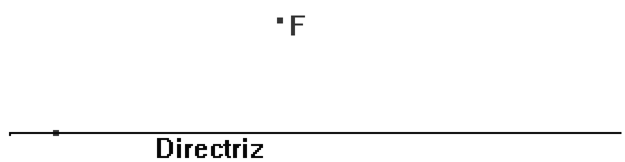
Actividad 1

Objetivo: Elaborar el concepto de parábola y su construcción como lugar geométrica.

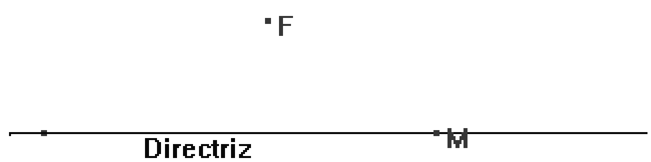
Haciendo uso del programa Cabri-Geómètre II, realice en el orden que se le presenta las siguientes actividades.

1. Trace una recta horizontal y etiquétela con el nombre de *directriz.*

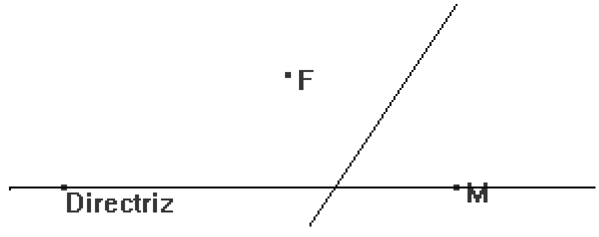
2. Coloque un punto arriba de la recta y etiquételo con la letra F (Foco).



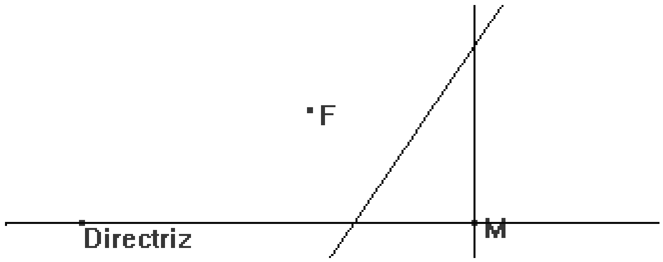
3. Coloque un punto en la recta y etiquételo con la letra M.



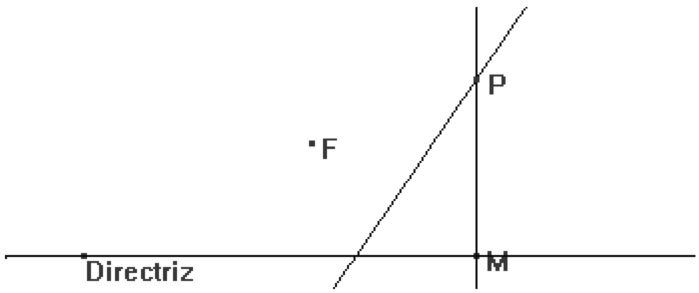
4. Trace la mediatriz entre el punto M y el punto F.



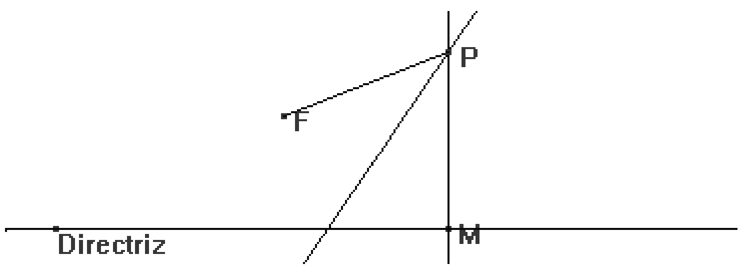
5. Trace una recta perpendicular a la recta D*irectriz* por el punto M y marque el punto de intersección de ésta con la mediatriz del punto F al punto M.



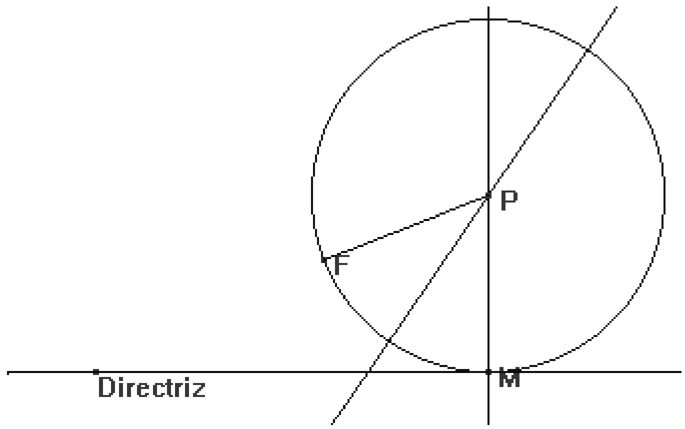
6. Etiquete el punto de intersección con la letra P.



7. Trace el segmento del punto F al punto P.



8. Trace una circunferencia con centro en P y radio PM.



9. Es el punto P equidistante del punto F y el punto M?. Justifique su respuesta.

10. Con la opción puntero mueva el punto M sobre la recta y observe la trayectoria que describe el punto P.
11. Que figura forma la trayectoria del punto P.
12. Del icono 10 selecciona Traza activa, presione el botón principal del Mouse sobre el punto P.
13. Mueva el punto M sobre la recta D*irectriz.*
14. ¿Qué forma tiene la figura obtenida?
15. ¿Son colineales los puntos que están sobre la parábola obtenida? ¿por qué?
16. ¿Se puede dibujar la parábola mediante la unión de pequeños segmentos de recta?
17. Elabora tu propio concepto de parábola

Actividad 2

Objetivo: Determinar el valor numérico de una función cuadrática dada su ecuación, y dada la representación tabular de una función determinar si los datos corresponden a una función cuadrática.

Haciendo uso de la hoja electrónica de cálculo Excel, realice en el orden que se le presentan las siguientes actividades.

Dada a ecuación $y = x^2 + 2x - 3$

1. Escriba los parámetros a, b y c de la función en las celda E2, F2, G2 respectivamente.
2. Encuentre el valor de **y** para cada uno de los valores dados para ***x*** en la siguiente tabla, escribiendo la fórmula =$E$2*A2*A2+$F$2*A2+$G$2 en la celda B2, copie la fórmula de la celda B3 a la B9 y tome nota de los resultados obtenidos.

	A	B	C	D	E	F	G
1	X	Y	Primeras diferencias	Segundas diferencias	***a***	***b***	***c***
2	-3				1	2	-3
3	-2						
4	-1						
5	0						
6	1						
7	2						
8	3						
9	4						

3. Explique si los valores de la tabla anterior corresponde a una función o no.
4. En la columna C calcule las primeras diferencias de los valores de ***y*** escribiendo la fórmula =B2-B3 en la celda C2.
5. Copie la fórmula anterior de la celda C3 hasta la celda C8, tome nota de los resultados.
6. ¿Varía el valor obtenido o se mantiene constante?

7. En la columna D calcule las segundas diferencias de ***y*** escribiendo en la celda D2 la fórmula C2-C3
8. ¿Cuál es el valor obtenido?
9. Copie la fórmula anterior de la celda D3 hasta la celda D7, tome nota de los resultados
10. ¿Es constante el valor obtenido en la columna D?

Sea la función $y = 2x^2 + 6x + 3$

1. En la hoja 2 de Excel escriba los valores de los parámetros de la función en las celdas E2, F2, G2.
2. Encuentre el valor de ***y*** para cada uno de los valores de ***x*** dados en la tabla escribiendo en la celda B2 la fórmula =$E$2*A2*A2+$F$2*A2+$G$2 y escriba los resultados obtenidos en la siguiente tabla.

	A	B	C	D	E	F	G
1	X	Y	Primeras diferencias	Segundas diferencias	***a***	***b***	***c***
2	-3				2	6	3
3	-2						
4	-1						
5	0						
6	1						
7	2						
8	3						
9	4						

3. Explique si los valores de la tabla anterior corresponden a una función o no.
4. En la columna C calcule las primeras diferencia de los valores de ***y,*** escribiendo la fórmula =B2-B3 en la celda C2.
5. Copie la fórmula anterior de la celda C3 hasta la celda C7
6. ¿Varía el valor obtenido o se mantiene constante?
7. Cambie el parámetro ***c*** de la celda G2 repetidamente con valores diferentes y observe el valor de las segundas diferencia de la columna D.

8. ¿Es constante el valor obtenido en la columna D para cada uno de los valores dados del parámetro **c**?
9. Haga lo mismo del paso anterior con el parámetro ***b*** y observe el valor de la columna D.
10. ¿Es constante el valor obtenido en la columna D para cada uno de los valores dados del parámetro **b**?
11. Cambie el valor del parámetro ***a*** para diferentes valores
12. ¿Es constante el valor obtenido en la columna D?
13. ¿Qué puede concluir respecto a las segundas diferencias de ***y*** en una función cuadrática en su representación tabular?
14. De las funciones representadas por los datos de cada una de las siguientes tablas, escriba a la par si los datos corresponden a una función cuadrática, justifique su respuesta.

x	Y
1965	25.41
1970	30.81
1975	36.15
1980	41.57
1985	47.03
1990	52.42

X	Y
-9	-188
-6	-89
-3	-26
0	1
3	-8
6	-53
9	-134
12	-251

x	y
-9	59.5
-6	13
-3	11.5
0	1
3	-0.5
6	7
9	23.5
12	49

x	Y
1940	20
1950	25
1960	35
1970	48
1980	67
1990	81
2000	89.6

Actividad 3

Objetivo: Dada la representación algebraica de un función cuadrática, determinar su representación tabular y gráfica.

Ejercicio 1

Sea la función $y = x^2 - 2x + 1$, determine el valor de ***y*** para cada uno de los valores de x, dados en la siguiente tabla.

x	y
-1	
0	
1	
2	
3	

Haciendo uso del software Cabri-Géomètre II realice las siguientes actividades para construir la representación gráfica de la función anterior.

1. Seleccione la opción <<mostrar ejes>> que se encuentra en el último icono.
2. Del mismo icono seleccione <<definir cuadrícula>> y haga clic sobre uno de los ejes.
3. Con la opción <<punto>> del tercer icono, ubique en el plano cartesiano cada uno de los puntos obtenidos en la tabla.
4. Seleccione la opción <<cónica>> del cuarto icono.
5. Haga clic en cada uno de los puntos ubicados en el plano.
6. ¿Cuál es la forma de la figura obtenida?
7. ¿Cuál es el dominio de la función?
8. ¿Cuál es el rango de la función?
9. En el noveno icono seleccione la opción <<ecuación y coordenada>>.
10. Haga clic sobre la parábola para obtener su ecuación.
11. ¿Coincide ésta ecuación mostrada en Cabri con la ecuación $y = x^2 - 2x + 1$?

Ejercicio 2

Dada la función $y = x^2$, complete la siguiente tabla determinando los valores de ***y*** para cada uno de los valores de ***x***.

x	Y
-2	
-1	
0	
1	
2	

En una nueva hoja del software Cabri-Géomètre II, represente gráficamente la función siguiendo los pasos del ejercicio 1y luego conteste las siguientes preguntas.

¿Qué forma tiene la figura obtenida?

¿Cuál es el dominio de la función?

¿Cuál es el rango de la función?

Traslade la gráfica obtenida sobre el eje ***y*** realizando los siguientes pasos

1. Del tercer icono seleccione la opción <<vector>>.
2. Dibuje un vector sobre el eje ***y*** que inicie en el origen del plano.
3. Del sexto icono seleccione la opción <<traslación>>.
4. Haga clic en la parábola y luego haga clic sobre el vector dibujado.
5. Muestre la ecuación de la nueva parábola.
6. ¿Cuál es la ecuación obtenida?
7. Dibuje más vectores y traslade la primera gráfica según cada uno de los vectores y muestre su ecuación correspondiente.
8. En cada una de las ecuaciones, cuál es el mayor exponente de la variable ***x***.
9. ¿Cuál es el menor exponente de la variable ***y***?
10. De las siguientes ecuaciones, marque con una X aquellas cuya gráfica es una parábola.

_____ $y = 2x^2 + 5x - 3$

_____ $x^2 + 4x - y + 5 = 0$

_____ $2x + 4y = 3$

_____ $2x + 3y - 5 + 7x^2 = 0$

_____ $3x^2 - 5x + 7 = y$

_____ $y = -6x + 9$

_____ $5x + 3y = 2x^2$

11. ¿Qué forma tiene la representación gráfica de una función cuya representación algebraica es de la forma $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$?
12. Escriba una ecuación cuya representación gráfica sea una parábola.

Actividad 4

Objetivo: Construir el lugar geométrico de una función cuya representación algebraica está dada por $y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$, y observar cómo afecta a la gráfica el cambio de valor del parámetro c.

Ejercicio

1. Construya el lugar geométrico de la función $y = 0.5x^2 - 1x + 2$

   1.1. Del último icono seleccione <<mostrar ejes>>.

   1.2. En el segundo icono seleccione <<punto>> y ubique un punto sobre el eje x.

   1.3. Seleccione la opción <<ecuación y coordenadas>> del noveno icono y haga clic sobre punto que ubicó en el eje x.

   1.4. Seleccione la opción <<Edición numérica>> del penúltimo icono.

   1.5. Haga clic en la parte superior izquierda de la pantalla y escriba 0.5.

   1.6. Haga clic más abajo y escriba –1.

   1.7. Nuevamente haga clic más abajo y escriba 2.

   1.8. Seleccione comentario y escriba la ecuación $y = 0.5x^2 - 1x + 2$, recuerde que los parámetros en el comentario se ingresan haciendo clic sobre los números que introdujo usando la edición numérica.

   1.9. Del noveno icono seleccione la opción <<calcular>> y calcule el valor de ***y*** con ***x*** igual al valor de la abscisa del punto que ubicó sobre el eje x.

   1.10. Ubique el valor obtenido debajo del comentario $y = 0.5x^2 - 1x + 2$.

   1.11. Del quinto icono, seleccione <<transferencia de medida>>, haga clic sobre el valor de ***y*** calculado anteriormente.

   1.12. Haga clic en el origen del plano y luego haga clic sobre el eje ***y.***

   1.13. Trace una recta perpendicular al eje ***x*** en el punto ubicado sobre este eje.

   1.14. Trace una recta perpendicular al eje ***y*** en el punto donde hizo la transferencia de medida.

1.15. Del segundo icono seleccione <<puntos de intersección>> y haga clic en ambas rectas, etiquete el punto con la letra P.

1.16. Mueva el punto que está sobre el eje ***x*** y observe la trayectoria del punto de intersección P de las dos rectas.

1.17. Del quinto icono seleccione <<lugar geométrico >>, haga clic sobre el punto de intersección de las rectas perpendiculares, luego haga clic sobre el punto que está sobre el eje ***x.***

2. Ubique cinco puntos en el lugar geométrico obtenido.
3. Del cuarto icono seleccione <<cónica>>, y haga clic sobre los cinco puntos que ubicó en el lugar geométrico.
4. Oculte el lugar geométrico.
5. Guarde en el disco duro el archivo con el nombre de ***parábola + su nombre.***
6. ¿Qué forma tiene la figura?
7. Coloque un punto en la intersección de la parábola con el eje ***y***, muestre las coordenadas del punto.
8. ¿Cuál es el punto de intersección de la parábola con el eje ***y***?
9. En el comentario $y = 0.5x^2 - 1x + 2$, cambie el parámetro **c** por los valores que se dan en la tabla y escriba el punto de intersección de la parábola con el eje ***y***.

c	***Punto de intersección con el eje y***
3	
6	
-5	
-1	
4	
1	

8. En cada una de las siguientes funciones determine el punto de intersección de la gráfica con el eje ***y***, sin el uso de la computadora.

Función	Punto de intersección con el eje ***y***
$y=-2x^2+5x-3$	
$y=3x^2-7x+5$	
$y=-5x^2+2x+7$	
$y=-2x^2+7x-2$	
$y=x^2+5x+6$	
$y=-5x^2+4x-8$	
$y=ax^2+bx+c$	

9. Escriba una conclusión acerca del punto de intersección con el eje ***y*** de una función cuadrática dada su ecuación.

Actividad 5

Objetivo: Encontrar la expresión algebraica que permite determinar el valor numérico de ***x*** y ***y*** en el vértice de una parábola dada su ecuación y calcular el valor numérico de ***y*** en el vértice de la parábola dado el valor numérico de ***x***, determinar la ecuación del eje de simetría de la parábola.

En el programa Cabri-Géomètre II abra el archivo ***parábola + su nombre*** y realice las siguientes actividades.

1. Cambie el parámetro ***a*** con los valores que se dan en la tabla y escriba en la siguiente columna si la parábola es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo, y si su vértice es un punto máximo o mínimo.

a	**Concavidad**	**Punto máximo o mínimo**
2		
-3		
5		
-2.5		
3.5		
-8		
-9		
3		

2. ¿Qué relación tiene el parámetro ***a*** con respecto a la concavidad de la gráfica de una función cuadrática?
3. ¿Cuándo la gráfica de una función cuadrática con ecuación $y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$ tiene un punto máximo?
4. ¿Cuándo la gráfica de una función cuadrática con ecuación $y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$ tiene un punto mínimo?
5. Coloque un punto sobre la parábola.
6. Trace la recta perpendicular al eje ***y*** por el punto que colocó.

7. Coloque un punto en la otra intersección de la parábola con la recta perpendicular anterior.
8. Oculte la recta.
9. Trace un segmento con extremos en los puntos que colocó en la parábola.
10. Trace la mediatriz del segmento. Está recta es el ***eje de simetría*** de la parábola.
11. Oculte el segmento.
12. Marque el punto de la intersección de la mediatriz con la parábola, ese punto es el ***vértice*** de la parábola.
13. Muestre la ecuación de la recta.
14. ¿Cuál es la ecuación del eje de simetría? ____________
15. ¿Cuál es el valor de ***x*** en el vértice? ________________
16. ¿Cómo encontraría el valor de ***y*** en el vértice?
17. Cambie el parámetro ***a*** y el parámetro ***b***, con los valores que se dan en la tabla y apunte en la columna correspondiente la ecuación de la recta del eje de simetría, el valor de ***x*** en el vértice de la parábola, calcule además el valor de ***y*** para el vértice.

a	***b***	***Eje de simetría***	***Valor de la abscisa en el vértice***	***Valor de la ordenada en el vértice***
1	3			
2	3			
7	-2			
-5	1			
2	5			
-3	-1			
5	2			

18. Escriba la ecuación del eje de simetría de la gráfica de la función $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$
19. Escriba la fórmula para determinar el valor de la abscisa en el vértice de la gráfica de la función $y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$

20. Determine el eje de simetría y el vértice de la gráfica de cada una de las siguientes funciones, sin usar computadora, puede hacer uso de calculadora para realizar cálculos

Función	Eje de simetría	Vértice
$y=-2x^2+6x-3$		
$y=3x^2-9x+5$		
$y=-5x^2+10x+7$		
$y=-2x^2+7x-2$		
$y=x^2+5x+6$		
$y=-5x^2+4x-8$		

Actividad 6

Alumno____

Objetivo: Determinar los puntos de intersección de la gráfica de una función cuadrática con el eje ***x***, identificar donde la gráfica de una función cuadrática es creciente o decreciente.

Haciendo uso del programa Grapes realice la siguiente actividad

1. Grafique la función $y = x^2 + 3x - 1$
2. Del menú seleccione la opción Fondo/Herramientas
3. Haga clic en el tercer icono <<indicar los valores de la función>>
4. Observe el punto de intersección de la gráfica con el eje ***x***, en la ventana valor de función escriba el valor para ***x*** que considere que corresponde al punto de intersección.
5. ¿Cuál debe ser el valor de la ordenada ***y*** en el punto de intersección de la parábola con el eje ***x***?

6. ¿Es el número que escribió el valor de ***x*** que corresponde al punto de intersección?, ¿por qué?

7. Intente con otros valores hasta obtener la mejor aproximación

8. Si en la función $y = x^2 + 3x - 1$ sustituye la variable ***y*** por cero que se obtiene

9. Cómo calcularía el valor de $\boldsymbol{x}$ en los puntos de intersección de la gráfica de la función anterior con el eje $\boldsymbol{x}$

10. Encuentre el punto de intersección si existe, de la gráfica de las siguientes funciones

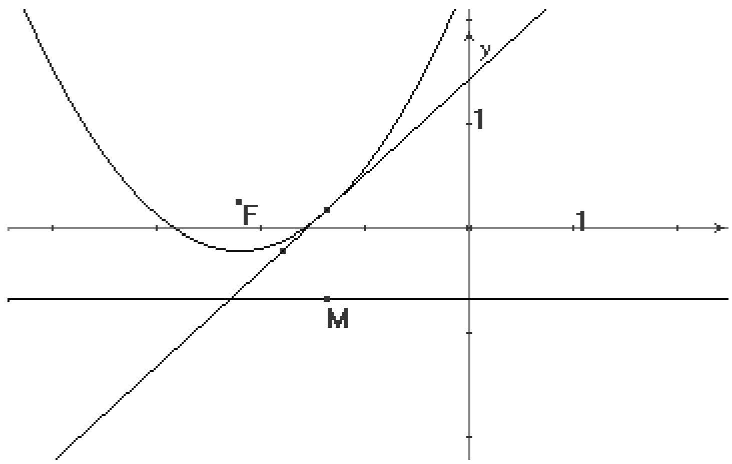
Función	Punto de intersección con el eje $\boldsymbol{x}$
$y = -2x^2 + 5x - 3$	
$y = 3x^2 - 7x + 5$	
$y = -5x^2 + 2x + 7$	
$y = -2x^2 + 7x - 2$	
$y = x^2 + 5x + 6$	
$y = -5x^2 + 4x - 8$	

Actividad 7

Objetivo.

Determinar los puntos donde la gráfica de función cuadrática es creciente y donde es decreciente.

1. Abra el archivo <<crece o decrece la parábola>>, que contiene la siguiente figura.



2. Observe la recta tangente a la parábola

3. ¿Es positiva o negativa el valor de la pendiente de la recta tangente a la parábola?
4. ¿Para que una recta sea creciente cómo debe ser su pendiente?

5. ¿Para que una recta sea creciente cómo debe ser su pendiente?

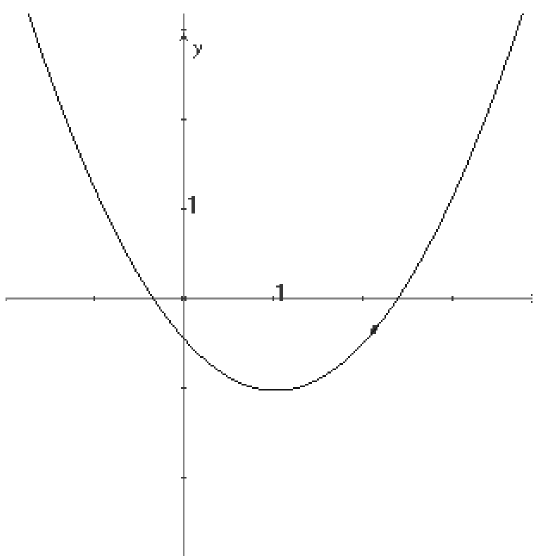
6. Muestre las coordenadas del punto de intersección de la parábola con la recta tangente.

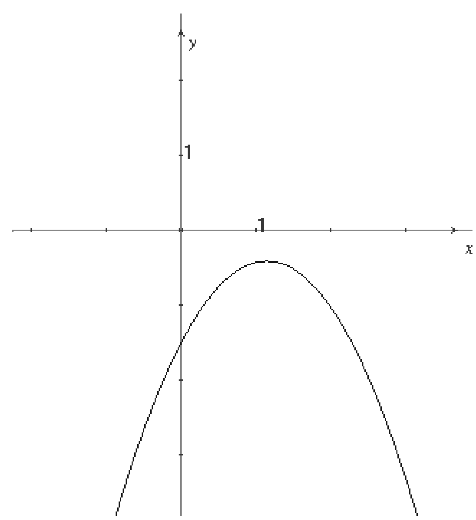
7. Mueva el punto M, observe y explique en qué partes la parábola es creciente y dónde es decreciente.

8. Muestre la pendiente de la recta tangente a la parábola y explique la relación que existe entre la pendiente de la recta tangente con respecto a las partes donde la parábola es creciente y donde decreciente.

9. Mueva el punto F hacia debajo de la recta Directriz y explique en que partes la parábola es creciente y donde decreciente

10. Marque en color azul la parte de la parábola donde es creciente y con color rojo donde es decreciente.





Actividad 8

Objetivo. Determinar la ecuación de una función cuadrática dada su grafica y tres de sus puntos.

1. Ingrese al programa Grapes.
2. En la opción Función del panel de datos haga clic en Dibujar.
3. Escriba la instrucción path(x,P,Q,R).
4. En la opción Objeto Elemental haga clic en Dibujar y seleccione el punto P
5. De las figuras que aparecen haga clic sobre el punto P.
6. En la coordenada **x** escriba 0.
7. En la coordenada **y** escriba 1.
8. Haga clic en Ok.
9. En el punto Q introduzca las coordenadas (1,0).
10. En el punto R introduzca las coordenadas (2,3).
11. ¿Qué tipo de figura se forma?
12. Encuentre la ecuación de la gráfica obtenida.
13. Cambie las coordenadas de los puntos P, Q, R por (0,2), (1,5) y (3, -7) respectivamente.
14. Encuentre la ecuación de la gráfica obtenida.

Actividad 9

Objetivo: Resolver un problema de aplicación, el cual consiste en determinar las dimensiones del rectángulo de el área máxima inscrito en un triángulo que forman los ejes cartesianos y la recta que pasa por los puntos (4,0) y (0,3).

Haciendo uso del Cabri-géomètre realice las siguientes actividades

1. En el plano cartesiano marque los puntos (4,0) y (0,3).
2. Trace la recta que pasa por dichos puntos.
3. Encuentre la ecuación correspondiente a esa recta sin hacer uso de la herramienta ecuación y coordenadas.

4. Trace el segmento con extremos en el origen y el punto de intersección de la recta con el eje ***x*.**
5. Ubique un punto sobre el segmento anterior.
6. Dibuje el rectángulo inscrito en el triángulo que forma la recta con los ejes cartesianos, para dibujar el rectángulo trace una recta perpendicular al eje ***x*** por el punto anterior, marque su punto intersección con la recta, trace la perpendicular por ese punto con el eje ***y*** marque el punto de intersección de esa recta con el eje ***y***.
7. Oculte la rectas perpendiculares a cada uno de los ejes.
8. Utilice la herramienta polígono señale el punto sobre la recta, el punto sobre el eje ***x*,** el origen y el punto sobre el eje ***y***
9. Construya otro rectángulo inscrito en el mismo triángulo.
10. ¿Es igual el área del primer rectángulo con el área del segundo rectángulo?.

11. Obtenga la medida de la base y la altura de cada uno de los rectángulos, haciendo uso de la herramienta distancia y longitud.

12. Calcule el área de cada uno de los rectángulos y compruebe si las áreas son iguales o no.
13. Borre uno de los rectángulos y las distancias de los lados de cada uno de ellos.
14. Mueva el punto que esta sobre el segmento y explique qué sucede.
15. Si la base del rectángulo tiene una medida de 2 unidades, ¿cuál debe ser la medida de su altura?

16. Escriba una expresión para calcular el área del rectángulo para cualquiera que sea la medida de su base.

17. Utilizando la herramienta área calcule el área de l del polígono.
18. Con transferencia de medida señale el valor del área, señale el punto ubicado en el eje $\boldsymbol{x}$ y señale el segmento que esta sobre este punto.
19. Con la herramienta lugar geométrico señale el punto que acaba de obtener y luego en el punto que esta sobre el eje $\boldsymbol{x}$.
20. ¿Cuál es el área máxima del rectángulo inscrito?

Actividad No. 10

Escuela Normal Mixta “Pedro Nufio”

Prueba de Matemática

Alumno: ____ Sección: __________

Indicaciones: Resuelva en forma clara y ordenada cada uno de los siguientes ejercicios.

Ejercicio 1

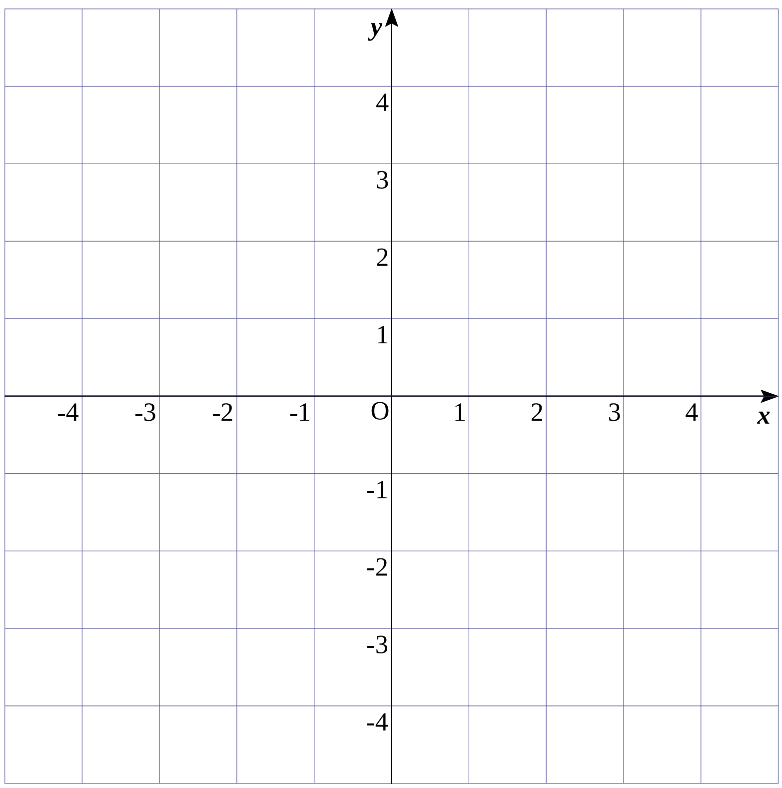
Dada la función $y = x^2 + 2x - 3$, complete la siguiente tabla, determinando el valor de y para cada uno de los valores de x dados, cualquier cálculo realizado debe dejarlo escrito en el espacio de trabajo.

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y							

Ejercicio 2

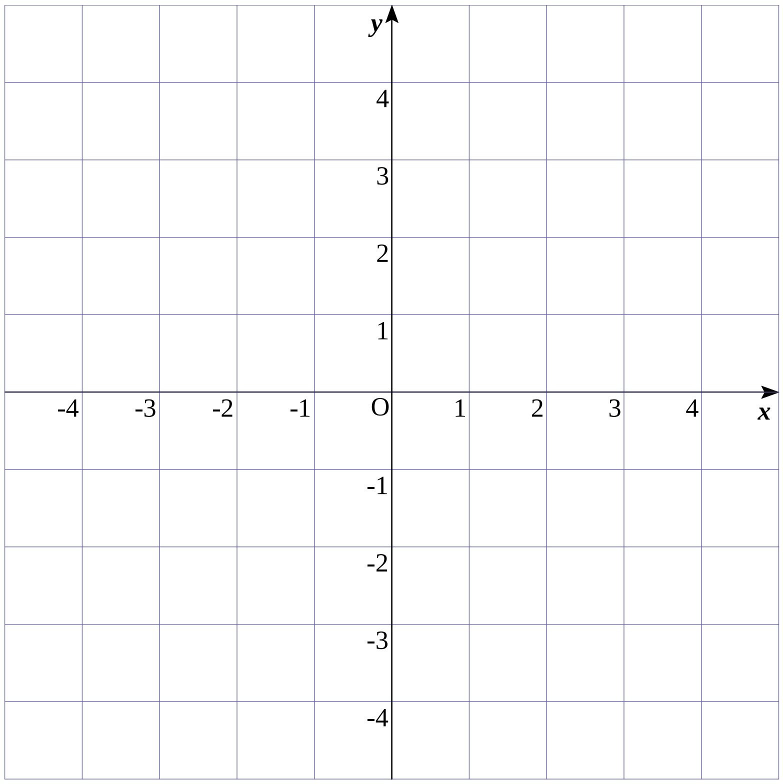
En el plano cartesiano que se le presenta a continuación grafique los puntos que se le presenta en la tabla, explique su es función, si su respuesta es afirmativa explique si es lineal, cuadrática o ninguna de ellas.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	6	1	-2	-3	-2	1	6



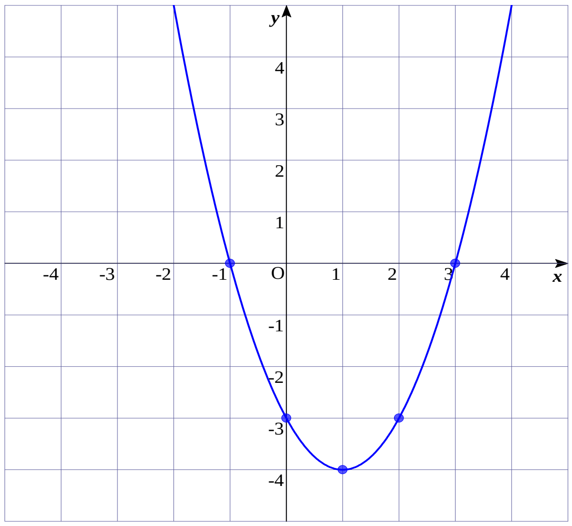
Ejercicio 3

Grafique la función $y = x^2 - 2x - 8$



Ejercicio 4

Encuentre la ecuación de la siguiente gráfica.



Con la gráfica anterior escriba lo que se le pide a continuación

Punto de intersección con el eje x ______________________________

Punto de intersección con el eje y ______________________________

Vértice ____________________________________

Eje de simetría _______________________________

Ejercicio 5

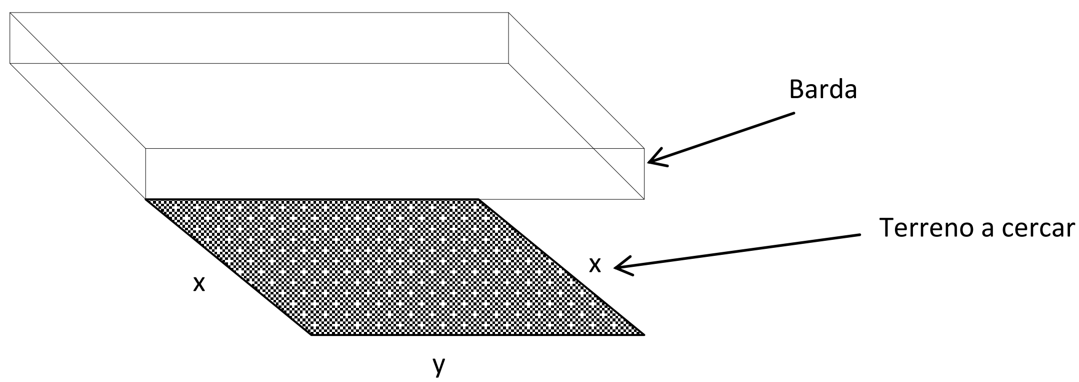
Encuentre la expresión algebraica para la función representada por los datos de la siguiente tabla.

X	Y
0	-4
1	0
2	6
3	14
4	24
5	36

Ejercicio 6

Resuelva el siguiente problema.

Un granjero le dijo a su hijo que utilizara 50 metros de alambre para cercar un terreno y que ese espacio lo utilizara para construir una casa. El hijo, muy astuto, se pregunto si con los 50 metros de alambre podrían conseguir diferentes tipos de terrenos y asi escoger el más grande. En los terrenos de su padre había un lado que colindaba con otra construcción donde había una barda. Lo primero que se le ocurrió al hijo fue construir la cerca de manera que uno de los lados fuera la barda, así podría aprovechar parte del alambre para cubrir más área. (Vea la figura).



Encuentre una expresión algebraica para representar el área del terreno en función de x.

¿Cuál es el máximo de área que puede obtener de esta manera el hijo?

Anexo No 3

Protocolos

Actividad No. 1

Sobre el concepto de parábola.

Profesor: ¿Es el punto P equidistante del punto F y M?

Francia: Sí, parece

Profesor: ¿Es equidistante?

Francia: Sí

Profesor: ¿Por qué?

Francia: Porque tienen la misma medida

Profesor: ¿Por qué puede decir que tiene la misma medida?

Francia: Porque la circunferencia también dio… porque la circunferencia cuando la trace dio de los dos puntos.

Profesor: ¿Qué es el segmento $\overline{PF}$ de la circunferencia?

Francia: El radio

Profesor: ¿Y $\overline{PM}$?

Francia: También es un radio

Profesor: ¿Son equidistantes los puntos?

Francia: Sí

Profesor: ¿Por qué?

Francia: Porque tienen la misma medida

Diálogo Profesor-Evelyn

Profesor: ¿El punto P es equidistante del punto F y el punto M?

Evelyn: Sí.

Profesor: **¿**Por qué?

Evelyn: Porque la definición de circunferencia es que… es el conjunto de puntos que todos son equidistantes, entonces cualquier punto que agarre de aquí acá, cualquier punto va a ser igual.

Diálogo Profesor-Belkis

Profesor: ¿Es el punto P equidistantes de los puntos F y M?

Belkis: Sí.

Profesor: ¿Por qué?

Belkis: Porque F y M están a la misma distancia de P.

Profesor: ¿Por qué podemos decir que están a la misma distancia?

Belkis: Porque ambos están en la misma circunferencia y son el mismo radio

Diálogo Profesor-Maylin

Profesor: ¿Es el punto P equidistantes de los puntos F y M?

Maylin: Sí, es equidistante porque el punto P esta a la misma distancia que F y M

Profesor: ¿Por qué podemos asegurar que el punto P está a la misma distancia que F y M?

Maylin: Porque podemos tomar a F y M como el radio y P como el centro

Diálogos sobre la traza activa de la parábola Profesor-Evelyn

Profesor: Movamos el punto M que está en la directriz y observe la trayectoria del punto P.

Profesor: ¿Qué figura se forma?

Evelyn: Una parábola

Profesor: ¿Los puntos de esa parábola son coliniales?

Evelyn: No

Profesor: ¿Por qué no son coliniales?

Evelyn: Porque no están en una misma recta.

Profesor: ¿Podemos dibujar la parábola mediante la unión de segmentos?

Evelyn: No.

Diálogo Profesor-Belkis

Profesor: ¿Se dio cuenta que figura formó cuando movió el punto M?

Belkis: Una parábola.

Profesor: ¿Esos puntos de la parábola son coliniales?

Belkis: No .

Profesor: ¿Por qué?

Belkis: Porque no están en una misma recta.

Profesor: ¿Podemos dibujar esa parábola mediante la unión de pequeños segmentos?

Belkis: No.

Profesor: ¿Por qué?

Belkis: Por qué no quedaría en forma de curva

Diálogo Profesor- Erika

Profesor: ¿Que figura se formó al mover el punto M?

Erika: Una parábola.

Profesor: ¿Son coliniales los puntos de esa parábola?

Erika: No, no son porque no se encuentran en la misma recta.

Profesor: ¿Podría dibujarse esa parábola mediante la unión de segmentos?

Erika: No.

Profesor: ¿Por qué no?

Erika: Por qué, déjeme explicarle… no sabría explicarle pero para mí no.

Profesor: ¿Qué pasaría si la hace a través de la unión de pequeños segmentos?

Erika: Quedaría como rectangulitos, como esquinitas así.

Profesor: ¿La parábola tiene segmentos?

Erika: No.

Profesor: ¿Por qué?

Erika: Porque es una curva.

Diálogo Profesor-Maylin

Profesor: ¿Qué figura se formó al mover el punto M?

Maylin: Una parábola.

Profesor: Los puntos de esa parábola son colineales.

Maylin: No, porque no están en una misma recta, están en un mismo plano.

Diálogo Profesor-Owen

Profesor: ¿Qué figura se formo al mover el punto M?

Owen: Una parábola

Profesor: ¿Son colineales los puntos de esa parábola?

Owen: No.

Profesor: ¿Por qué?

Owen: Porque los puntos colineales deben estar en una misma recta y estos no lo están.

Profesor: ¿Y podríamos dibujar esa parábola mediante la unión de segmentos?

Owen: Creo que no, no estoy muy seguro, no podríamos dibujarla porque la parábola forma como una circunferencia, es curva.

Diálogo Profesor-Dasly

Profesor: ¿Qué figura se le formó al mover el punto M sobre la directriz?

Dasly: Una parábola.

Profesor: ¿Son colineales los puntos de esa parábola?

Dasly: No.

Profesor: ¿Por qué?

Dasly: No son colineales porque no están en una misma recta, yo creo que sí son coplanares porque están en un mismo plano.

Profesor: ¿Se podría dibujar esa parábola mediante segmentos?

Dasly: Sí.

Profesor: ¿Cuáles segmentos serían?

Dasly: Vamos a ver acá forman un segmento (muestra un radio $\overline{FP}$), éste, no, esa es una recta (muestra la recta tangente a la parábola).

Profesor: No, ¿la parábola en sí?

Dasly: La parábola en sí. ¿Sí se puede formar mediante pequeños segmentos?

Profesor: ¿Son segmentos los que forman la parábola?

Dasly: Sí.

Profesor: Señálelos…

Dasly: Porque cuando dibujamos, cómo es…, pitágoras profe, nosotros sacábamos las coordenadas y mediante las coordenadas sacábamos la parábola.

Profesor: ¿Esa parábola?

Dasly: ¿Ésta (señala la figura)?

Profesor: Sí, ¿La podemos dibujar mediante segmentos?

Dasly: ¿Mediante la unión de segmentos?

Profesor: Sí, ¿Qué pasaría si tuviera segmentos allí?

Dasly: Segmentos de acá, acá, de acá, acá (señala el radio $\overline{FP}$ y el radio que se forma con un segmento con la recta tangente).

Profesor: ¿Serían colineales los puntos de la parábola si tuviéramos segmentos?

Dasly: ¿Cómo?, no le entiendo la pregunta.

Profesor: De la parábola, ¿serían colineales los puntos?

Dasly: De la parábola, ¿sí serían colineales?

Profesor: ¿Sí?

Dasly: No.

Profesor: ¿Podemos tener segmentos allí?

Dasly: No, no podemos tener.

Profesor: No, ¿Por qué la parábola es una…?

Dasly: Porque la parábola entonces se forma por rectas.

Profesor: Es recta o curva.

Dasly: ¿Cómo?, es curva.

Protocolo de la Actividad No. 2

Para determinar si los datos de una función en su representación tabular es cuadrática.

Diálogo Profesor-Maylin

Profesor: ¿Esos datos que tiene allí pertenecen a una función?

Maylin: Sí.

Profesor: ¿Por qué?

Maylin: Para cada **x** no se repite ningún **y**.

Profesor: ¿Las primeras diferencias de esa tabla son constantes o varían?

Maylin: Varían

Profesor: ¿Y las segundas diferencias?

Maylin: Son constantes.

Profesor: ¿Qué pasaría si cambiamos el parámetro **a**, por ejemplo cambiémoslo por 2.

Maylin: (Cambia el valor).

Profesor: ¿Qué paso con las segundas diferencias?

Maylin: Se cambio el valor, pero siempre se mantiene constante.

Profesor: ¿Cambiémosle por 3?

Maylin: (Cambia el valor).

Profesor: ¿Qué paso con las segundas diferencias?

Maylin: Se mantienen constantes.

Profesor: Cambiemos el parámetro **b** a ver qué pasa. Pongámosle -5.

Maylin: (Cambia el valor).

Profesor: ¿Qué paso con las segundas diferencias?

Maylin: Se mantiene constante.

Profesor: ¿Qué podemos decir de una función cuadrática con respecto a sus segundas diferencias?

Maylin: El valor no cambia, sino que se mantiene constante.

Diálogo Profesor- Erika

Profesor: ¿Esos valores que tiene para **x** y **y**, pertenecen a una función?

Erika: Sí.

Profesor: ¿Por qué?

Erika: Porque, a una función, porqué el valor de -3 es -57, para -2 es -19, o sea, apra cada elemento de **x**, hay un solo elemento de **y**.

Profesor: ¿La primeras diferencias que obtuvo, ¿varían o son constantes?

Erika: Varían.

Profesor: En las segundas diferencias, el valor que le resultó, ¿es constante o varía?

Erika: Es constante.

Diálogo Profesor-Dasly

Profesor: Las primeras diferencias…

Dasly: ¿Éstas?

Profesor: Sí. ¿Son constantes o varían?

Dasly: Varían los valores.

Diálogo Profesor- Erika

Profesor: ¿En esa función, las segundas diferencias, ¿son constantes o varían?

Erika: Las segundas diferencias son constantes.

Profesor: ¿Qué pasaría si cambiamos el parámetro **a**, el parámetro **a** es 2?

Erika: Aja

Profesor: ¿Qué pasa si cambiamos a 3?, ¿Qué sucede con las segundas diferencias?

Erika: Sí, pero sigue siendo constante.

Profesor: Cambiemos el parámetro **c** por 5.

Erika: Cambia el valor.

Profesor: ¿Cambiaron las segundas diferencias?

Erika: No, no cambiaron.

Profesor: ¿Se mantienen?

Erika: Se mantienen constantes.

Profesor: Cambiemos el parámetro **a** por -2.

Erika: Cambia el valor.

Profesor: ¿Qué paso con las segundas diferencias?

Erika: Cambiaron a negativo, pero siempre es constante.

Profesor: ¿Qué pasa con una función cuadrática con las segundas diferencias?

Erika: No entiendo la pregunta.

Profesor: ¿Qué pasa con el valor de las segundas diferencias en una función cuadrática, ¿Varían o se mantienen constantes?

Erika: Se mantiene constante.

Diálogo Profesor-Evelyn

Profesor: ¿Los datos de esa tabla pertenecen a una función?

Evelyn: No.

Profesor: Estamos hablando de los datos correspondientes a **x** y **y**. ¿Qué valor tiene **y** cuando **x** es -3?

Evelyn: Tres.

Profesor: ¿Cuando **x** es -2?

Evelyn: Menos uno.

Profesor: ¿Esos valores pertenecen a una función?

Evelyn: No, porque se repiten (señala do valores en **y** que se repiten).

Profesor: ¿Cuál es la definición de función?

Evelyn: A un elemento en **x** se le va asignar un único elemento en **y**.

Profesor: ¿Cuántos valores tiene -3?

Evelyn: Uno.

Profesor: ¿Cuántos valores tiene -2?

Evelyn: Uno.

Profesor: ¿Cuántos valores tienen -1?

Evelyn: Unos.

Profesor: ¿Cuántos valores tiene cero?

Evelyn: Uno.

Profesor: ¿Hay algún valor de **x** que se le asignen dos valores?

Evelyn: No.

Profesor: ¿Es función?

Evelyn: Sí.

Profesor: ¿Las primeras diferencias varían?

Evelyn: Sí.

Profesor: ¿Y las segundas diferencias?

Evelyn: No.

Profesor: ¿El valor es?

Evelyn: Menos cuatro.

Profesor: ¿Y la función?

Evelyn: Dos equis cuadrado, más seis equis, más tres.

Profesor: ¿Vamos a trabajar con otra función. Cambiemos el parámetro **a** por 5?

Evelyn: Cambia el valor.

Profesor: Qué función sería?

Evelyn: Cinco equis cuadrado, más 5 equis, más tres.

Profesor: ¿Qué sucedió con las segundas diferencias?

Evelyn: Se mantienen constantes.

Profesor: Cambiemos 5 por 3.

Evelyn: Cambia el valor.

Profesor: ¿Qué pasó son las segundas diferencias?

Evelyn: Se mantiene constante.

Profesor: Cambiemos el 6 por -2 (cambio del parámetro **b**).

Evelyn: Cambia el valor.

Profesor: ¿Qué sucede con las segundas diferencias?

Evelyn: Se mantiene constante.

Profesor: ¿Qué pasa en una función cuadrática con las segundas diferencias?

Evelyn: Las segundas diferencias no varían sino que se mantienen.

Profesor: ¿Será cierto para toda función cuadrática?

Evelyn: Sí.

Protocolo de la Actividad No. 3

Para descubrir el tipo de ecuación correspondiente a una parábola.

Diálogo Profesor-Dasly

Profesor: ¿Qué figura obtuvo con esa función?

Dasly: Una parábola.

Profesor: ¿Cuál es el dominio?

Dasly: Cómo profe.

Profesor: El dominio, ¿Cuál será?

Dasly: Son todos los ejes en equis.

Profesor: ¿Entonces Serían?

Dasly: Serían uno y cuatro (señala los puntos (0,1) y (-1,4)).

Profesor: ¿Hasta uno y cuatro llega la gráfica?

Dasly: No, puede ser infinito, o sea que pertenece a todos los reales.

Profesor: ¿Y el rango?

Dasly: Déjeme analizar… El rango sería… creo que es de cero hasta el infinito postivo.

Diálogo Profesor-Maylin

Profesor: ¿Qué forma tiene la figura?

Maylin: Una parábola.

Profesor: ¿Cuál es el dominio de esa función?.

Maylin: Es, todos los números reales.

Profesor: Y el rango, ¿a partir de dónde va?

Maylin: Del uno a todos los positivos.

Profesor: ¿O sea que el uno es el punto más bajo? (el número 1 ubicado en el eje **y**)

Maylin: De cero, a todos los positivos, hasta el infinito.

Diálogo Profesor-Evelyn

Profesor: La figura obtenida, ¿Qué forma tiene?.

Evelyn: Una parábola.

Profesor: ¿Cuál es el dominio?

Evelyn: Desde el uno hacia todo los números positivos.

Profesor: ¿Quién nos da el dominio?

Evelyn: Son todos los números reales. El dominio equis.

Profesor: Entonces, ¿cuál es el dominio?

Evelyn: Todos los números reales.

Profesor: ¿Y el rango?

Evelyn: Desde uno hasta todos los positivos.

Profesor: ¿Desde uno?

Evelyn: Sí.

Profesor: ¿El punto más bajo en **y** es uno?, miremos… ¿cuál es el valor de **y** en el punto más bajo?

Evelyn: Señala el punto. Mientras piensa.

Profesor: ¿Cuál es el valor de **y** allí?

Evelyn: Allí, es cero.

Profesor: Entonces, ¿cuál es el rango?

Evelyn: Desde cero.

Profesor: ¿Desde cero…?

Evelyn: Hasta todos los números positivos.

Profesor: ¿Desde cero a más infinito. Ahora, la ecuación que tenemos allí, coinciden con la ecuación inicial?

Evelyn: Sí.

Profesor: ¿Cuál es el mayor exponente de la variable equis?

Evelyn: Dos.

Profesor: ¿Y el de **y**?

Evelyn: Cero.

Profesor: ¿El exponente de **y**?

Evelyn: Sí.

Profesor: cero?

Evelyn: No, uno.

Diálogo Profesor-Dasly.

Profesor: ¿Cuál es el punto de intersección de la parábola con el eje **y**?.

Dasly: Cero coma dos.

Profesor: Vamos a hacer los siguiente, cambie el parámetro **c**, ¿Cuál es el parámetro **c**?

Dasly: Éste. (Señala el 2 de la ecuación $y= 0.5x^2 – 1x + 2$)

Profesor: Borre el dos, y ponga 3.

Dasly: Cambia el número.

Profesor: ¿Cuál es el punto de intersección ahora?

Dasly: Cero coma tres.

Profesor: Cámbielo por 6.

Dasly: Cambia le valor.

Profesor: ¿Cuál es el punto de intersección?

Dasly: Cero coma seis.

Profesor: Cambie a -5, ¿Cuál será el punto de intersección?. (no se logra visualizar el punto por el tamaño de la pantalla).

Dasly: Cero coma menos cinco.

Profesor: miremos, mueva hacia abajo (refiriéndose al puntero).

Dasly: Mueve el puntero.

Profesor: ¿Cuál es punto de intersección?

Dasly: Cero coma menos cinco.

Profesor: Cambiemos a -1, ¿cuál es el punto de intersección?

Dasly: Cero coma menos uno.

Profesor: Cambiemos a cuatro, ¿cuál es punto de intersección?

Dasly: Cero coma cuatro.

Profesor: en conclusión, ¿cuál es el punto de intersección de la parábola con el eje **y**?

Dasly: Va ser el parámetro **c**.

Actividad No. 5

Concavidad, puntos máximos y mínimos, eje de simetría.

Diálogo Profesor-Erika

Profesor: Así como está esa parábola, ¿es cóncava hacia dónde?

Erika: Hacia arriba.

Profesor: ¿Cuál es el valor del parámetro **a**?

Erika: Ahorita le puse menos cinco pero es que estaba probando, tres.

Profesor: Cambiemos ese parámetro por negativo dos.

Erika: (Realiza el cambio).

Profesor: Su concavidad, ¿cómo es?

Erika: Hacia abajo.

Profesor: Póngale negativo cinco.

Erika: (Reliza el cambio).

Profesor: ¿Ahora es cóncava hacia dónde?

Erika: Hacia abajo.

Profesor: Póngale negativo dos.

Erika: (realiza el cambio)

Profesor: ¿Cóncava hacia donde?

Erika: Hacia abajo.

Profesor: ¿Qué relación tiene el parámetro **a** con respecto a la concavidad de una parábola?

Erika: Que cuando el parámetro **a** sea negativo, la parábola a ser cóncava hacia arriba, y cuando sea negativos la parábola va a ser cóncava hacia abajo.

Profesor: ¿Allí es cóncava hacia abajo?

Erika: Sí.

Profesor: Tiene punto máximo o mínimo en el vértice?

Erika: Punto máximo.

Diálogo Profesor-Evelyn

Determinando el eje de simetría.

Profesor: El parámetro **b** cámbielo por tres, ¿Cómo queda la ecuación?, del eje de simetría.

Evelyn: Equis igual a menos tres catorceavos.

Profesor: Cámbielo a cinco.

Evelyn: Éste.

Profesor: Siempre el parámetro **b**, ¿Cómo queda la ecuación?

Evelyn: Equis igual a menos cinco catorceavos.

Profesor: Cámbielo a nueve, ¿cómo queda la ecuación?

Evelyn: Equis igual a menos nueve catorceavos.

Profesor: ¿Ya encontró la relación que existe entre lo que es el parámetro **a** y el parámetro **b** respecto al eje de simetría?

Evelyn: Sí.

Profesor: ¿Qué relación existe?

Evelyn: El parámetro **b** me va a dar, es que, no sé cómo decirlo, en el equis me va dar el opuesto del parámetro **b** (se refiere al numerador).

Profesor: Y en el denominador, ¿qué queda?

Evelyn: Siempre el doble del parámetro **a**.

Actividad No. 6

Prevaleció la observación.

Actividad No. 7

Puntos donde la función cuadrática es creciente y puntos donde es decreciente.

Diálogo Profesor-Maylin

Profesor: Esa recta tangente que tiene allí.

Maylin: Profe ¿qué es tangente?

Profesor: En este caso es la recta que toca la parábola en uno de sus puntos.

Profesor: ¿La recta es creciente o decreciente?

Maylin: Cuando disminuye en una y avanza en otra, sería negativa.

Diálogo Profesor-Erika

Profesor: ¿En qué partes esa parábola es creciente?

Erika: Cuando la movemos para el lado de las equis positivas (se refiere a la recta tangente a la parábola). Digamos, vamos agarrar el punto, (toma el punto M de la directriz y lo mueve hacia la derecha). Si lo movemos par el lado de las equis positivas, es creciente porque va para allá (señalando con su mano con movimiento hacia la derecho). Si lo movemos para el lado de las equis negativas, entonces le va a dar valor negativo (señala la tangente que tiene en ese momento pendiente negativa).

Profesor: ¿Qué punto es ese que le hace cambiar el crecimiento o decrecimiento de la parábola?

Erika: El punto M es el que me hace…

Profesor: Muéstreme a partir de donde es creciente la parábola.

Erika: A partir de aquí (señala el vértice)… a partir del vértice.

Diálogo Profesor-Dasly

Profesor: ¿En qué partes de la parábola, es creciente?

Dasly: En qué partes?

Profesor: señáleme las partes dónde es creciente la parábola.

Dasly: Allí es creciente la parábola.

Profesor: Allí es creciente?

Dasly: Allí todavía es creciente, pero y cuando se mira que…, acá esta paralela (la recta tangente con el eje **x**),y ya cuando se mira de que se mueve a la izquierda va siendo decreciente.

Profesor: ¿A partir de qué punto, es que es decreciente?

Dasly: Uuun

Profesor: ¿A dónde hay el cambio?

Dasly: A partir del tres, del negativo tres coma cero dos y el cero diez y siete.

Profesor: ¿Qué punto será ese?

Dasly: Uuun.

Profesor: Segura que es ese punto.

Dasly: Sí porque si yo la muevo para acá… a partir del punto F.

Profesor: El punto F.

Dasly: Sí, porque va recto, (señala en dirección del eje de simetría).

Profesor: ¿Qué punto es ese?

Dasly: El foco.

Profesor: ¿Ese foco esta dentro de la parábola?

Dasly: ¿Cómo así?

Profesor: ¿Es parte de la parábola el foco, o sea, es un punto de la gráfica?.

Dasly: No, no es parte de la gráfica.

Profesor: ¿Entonces, a partir de qué puntos de la gráfica es decreciente?

Dasly: A partir del punto mínimo (la parábola está cóncava hacia arriba).

Profesor: Y cómo se le llama a ese punto mínimo?

Dasly: El vértice.